

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

М.В.Гринчак, А.Л.Шаповалов, К.В.Кузьмичова

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ
лабораторних робіт за темою**

«Інформаційні технології *MathCad* в будівництві»

з дисципліни

«Інформаційні технології в будівництві і бази даних»

*(для студентів 3 курсу денної і заочної форм навчання
спеціальності 6.092101 – «Промислове та цивільне будівництво»)*

Харків – ХНАМГ – 2009

УДК 333.13

ББК 65.290-2

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт за темою «Інформаційні технології MathCad в будівництві» з дисципліни «Інформаційні технології в будівництві і бази даних» (для студентів 3 курсу спеціальності 6.092101 – «Промислове та цивільне будівництво») / М.В.Гринчак, А.Л.Шаповалов, К.В.Кузьмичова – Харків: ХНАМГ, 2009. – 64 с.

Укладачі: к.т.н., доц. М.В.Гринчак,
к.т.н., доц. А.Л.Шаповалов,
К.В.Кузьмичова

Методичні вказівки до лабораторних робіт для студентів денної і заочної форми навчання розроблені на підставі робочої програми по дисципліні і містять наступні розділи: мета і завдання автоматизованого розрахунку; лабораторний практикум за системою MathCad; індивідуальні завдання, рекомендації до виконання робіт.

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, протокол № 9 від 24.03.2009 р.

Вступ

Однієї з головних областей застосування інформаційних технологій є математичні, інженерно-технічні і фінансові розрахунки.

Широку відомість і заслужену популярність придбали інтегровані системи для автоматизації різноманітних розрахунків класу MathCAD, розроблені фірмою MathSoft (США, <http://www.mathsoft.com>).

Донині вони залишаються єдиними математичними системами, в яких опис вирішення математичних завдань надається за допомогою звичних математичних формул та знаків. Такий же вигляд мають і результати обчислень. Таким чином системи MathCAD цілком виправдовують аббревіатуру CAD (Computer Aided Design), що говорить про належність до найбільш складних і просунутих систем автоматизованого проектування (САПР).

Останні версії системи MathCAD (v.13, v.14) надають нові засоби для підготовки складних документів. Тут також реалізоване зручне й наочне об'єктно-орієнтоване програмування складних завдань, в якому програма складається автоматично за завданням користувача, а саме завдання формулюється на природній математичній мові спілкування з системою. Набагато покращилася довідкова система та загальне керування нею. Організований зв'язок з іншими математичними системами.

Особливо слід відзначити, що MathCAD є не тільки засобом для вирішення математичних завдань. Це, власне кажучи, потужна обчислювальна система, що дозволяє підготувати на найвищому поліграфічному рівні будь-які стосовні до науки й техніки матеріали: документацію, наукові звіти, книги та статті, дисертації, дипломні та курсові проекти і т.д. В них одночасно можуть бути присутні тексти складного виду, будь-які математичні формули, графіки функцій та різні ілюстративні матеріали.

Докладний і повний опис роботи з системою MathCAD для користувачів є досить об'ємним і широко представлений у книгах та електронних посібниках [1, 2, 3]. Методичні вказівки містять основні необхідні відомості, опис *лабораторного практикуму* з восьми (2-х годинних) робіт для вивчення можливостей і технології роботи з системою (на базі русифікованих версій MathCAD (v.12, v.13, v.14)) та *індивідуальні завдання*. Для зручного виконання робіт кожна лабораторна робота представлена в електронному вигляді у файлах системи MathCad, які містять приклади й завдання.

Ці вказівки спрямовані на вивчення і застосування системи автоматизації обчислень MathCad у будівельних розрахунках, в них наведені приклади й технологія вирішення типових розрахункових завдань у будівництві.

1. ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ, МОЖЛИВОСТІ Й ТЕХНОЛОГІЯ РОБОТИ

1.1 Початок роботи. Інтерфейс системи MathCAD.

Запуск у середовищі Windows — через іконку на *Робочому столі* або панель **Пуск – Програми – MathApps - (Mathcad)**. Відразу після запуску

система готова до створення документа з необхідними користувачеві обчисленнями. Перша ж кнопка панелі інструментів (із зображенням чистого листка паперу) «Новий» дозволяє почати підготовку **нового** документа. Відповідне йому вікно редагування одержує назву «Без імені» (**Untitled: N**), де N — порядковий номер документа, що починається із цифри 1.

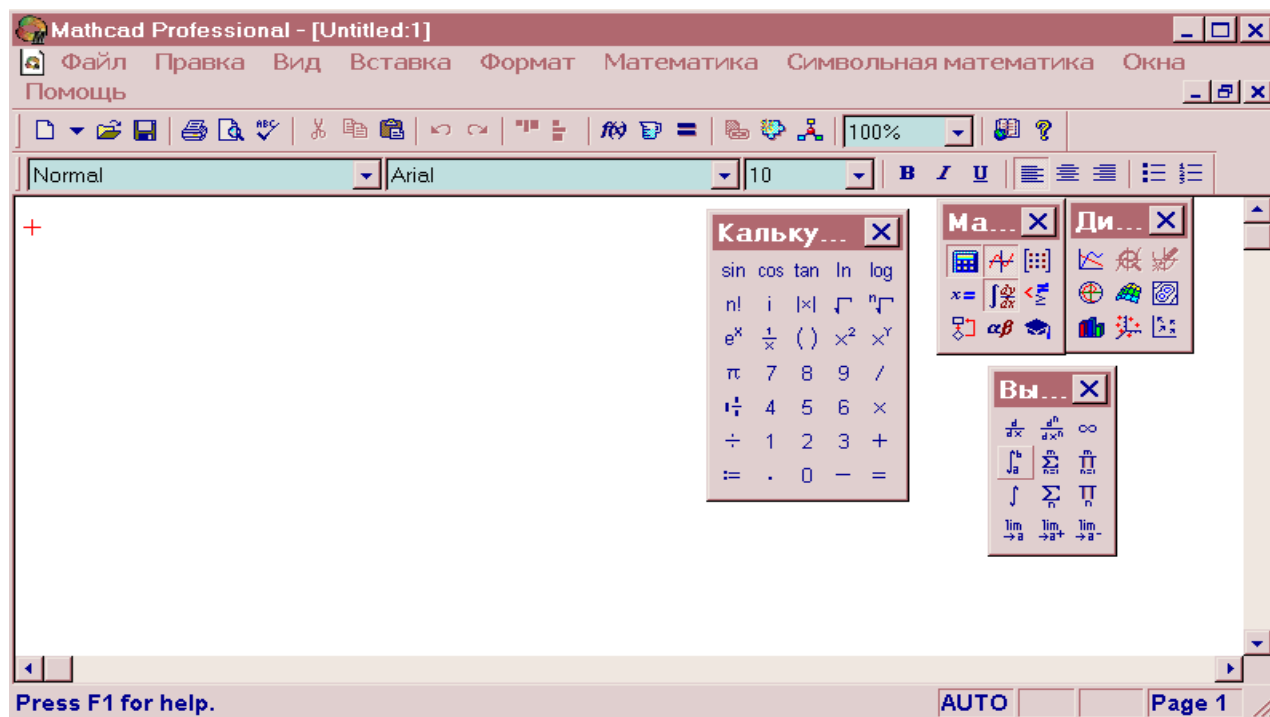


Рис. 1 – Екран системи MathCAD з порожнім вікном редагування й прямокутних панелей розділу меню **Математика**.

Нижче рядка **Меню** знаходиться *панель інструментів*, деякі піктограми, які вже відомі по роботі із програмами MS Office[1]. Нижче панелі інструментів розташовується *панель форматування*, яка містить списки й кнопки для завдання накреслення шрифту, його розміру в рівняннях і тексті. Для різних обчислень існують різні діалогові панелі *Меню*.

Нижче панелі шрифтів перебуває *робоче поле*, в якому розташовуються одне або кілька *вікон одночасно*. Вікно документів оформлене стандартним чином, тобто має рядок заголовка та кнопки керування вікном. У вікні розташовується *робочий документ* Mathcad. Робочий документ може містити в собі, *текст, формули, таблиці, графіки*.

Область робочого документа, в якій перебувають математичні оператори та вирази, будемо називати *математичною*, а область, яка містить текст і графіки - *текстовою* і *графічною*.

Якщо документ завантажений у вікно з файлу або був збережений у вигляді файлу, то в рядку заголовка виводиться **шлях та ім'я файла**.

Кожен з компонентів може бути прибраний з екрана (для збільшення площі робочого вікна поля) або виведений на екран шляхом звертання до пункту меню **Вікна** (*Windows*) і виконання відповідної команди в меню, яке випадає.

Багато-віконний режим роботи. У робочому полі програмного вікна перебувають вікна документів. Одночасно можуть бути відкритими до восьми вікон документів. Це дозволяє працювати відразу з декількома робочими документами, переходячи з одного документа в інший щикликом миші у вікні відповідного документа. Якщо потрібний документ схований іншими документами, то перейти до нього можна використовуючи список вікон, який з'являється при звертанні до пункту меню **Вікна**.

! Положення і лінійні розміри вікон змінюються стандартними способами.

Для впорядкування розташування вікон документів варто звернутися до пункту **Вікна** і виконати одну з команд: **каскад**, **вертикально**, **горизонтально**.

Вихід з Mathcad

Для закінчення роботи в Mathcad можна скористатися одним з наступних способів:

- клацнути мишею на кнопці *Закрити* в рядку заголовка програмного вікна;
- одночасно натиснути клавіші [Alt] + [F4] ;
- звернутися до пункту **Файл**, команда **Вихід**.

Якщо в робочому документі є *незбережені раніше зміни*, то перед виходом з'явиться вікно попереджень, що пропонує зберегти або ігнорувати зроблені зміни в документі.

1.2 Команди меню і панелі інструментів.



Рис.2 – Панель інструментів (Стандартна)

Перші кнопки відомі нам з програм MS Word й Excel.

Документи MathCAD є файлами. Файли можна створювати, завантажувати (відкривати), записувати й роздруковувати на принтері. Можливі операції з файлами представлені в меню **Файл** й в рядку панелі інструментів (див. Рис.2)

Під час підготовки документів їх доводиться видозмінювати й доповнювати — редагувати. Чотири кнопки служать для виконання операцій редагування документів: **(Вирізати)**, **(Копіювати)**, **(Вставити)**, **(Скасувати)**.

Кнопки (команди) розміщення блоків

Документи складаються з різних блоків: *текстових, формульних, графічних* і т.д. Блоки проглядаються системою, інтерпретуються і виконуються. Перегляд йде ліворуч праворуч й знизу вгору. Дві операції розміщення блоків представлені кнопками наступної групи:

Align Across (Розташувати уздовж) — блоки вирівнюються по горизонталі;

Align Down (Розташувати вниз) — блоки вирівнюються по вертикалі, розташовуючись зверху вниз.

Піктограми цих кнопок зображують блоки й зазначені варіанти їхнього розміщення.

Кнопки (команди) операцій з виразами.

Формульні блоки часто є виразами, що обчислюються, або виразами, що входять до складу заданих користувачем нових функцій. Для роботи з виразами служать піктограми:

Insert Function (Вставити функцію) — вставка функції зі списку, який з'являється в діалоговому вікні;

Insert (Вставити одиниці виміру);

Calculate (Обчислити) — обчислення виділеного виразу, дозволяє запускати обчислення для виділених блоків, що може зменшити час обчислень.

У нових версіях з'явилися нові кнопки - (вставити таблицю, гіперпосилання, компонент)[3].


Основні команди головного меню розглядаються нижче при необхідності в описі лабораторних робіт

Внизу екрана крім смуги горизонтального прокручування розташований ще один рядок — *рядок стану*. У ньому виводиться службова інформація, короткі коментарі, номер сторінки документа та ін. Ця інформація корисна для оперативної оцінки стану системи під час роботи з нею.

1.3 Введення і редагування із застосуванням клавіатури

В MathCAD-документі кожна область (блок) має форму прямокутника й може розміщуватися в будь-якому місці документа. Розміри документа (кількість рядків і колонок) визначаються обсягом доступної оперативної пам'яті. Частина документа, яку можна бачити, обмежується розмірами екрана.

Переміщення курсора (хрестика - покажчика) в документі здійснюється за допомогою *клавіш зі стрілками*.

 **MathCAD встановлює напрямок послідовності введення даних, виконання розрахунків і побудови графіків у документі - униз.**

Редагування документів можливо як за допомогою миші, так і клавіатури. У кожному разі корисно знати функції графічного курсору (маркера).

Курсор може мати наступні форми:


+ — хрестоподібний *червоний курсор (візир)* використовується для вказівки місця для нових блоків (текстових, формульних або графічних). Курсор має такий вигляд тільки поза простором блоків, тобто на порожньому місці екрана, і може переміщуватися клавішами керування курсором або встановлюватися мишею (для цього курсор миші встановлюється в потрібне місце й натискається ліва клавіша);

| — курсор у вигляді *червоної вертикальної риски (маркер введення)* використовується для вказівки на окремі елементи блоків, він звичайно

потрібен для введення даних і заповнення шаблонів. У текстових блоках використовується для вказівки місця вставки або видалення окремих символів, [] — курсор у вигляді синіх куточків різного розміру (**видільна рамка BP**), виділяє окремі частини виразу або вираз повністю.

Вигляд курсору залежить від напрямку введення. Натискання клавіші **Ins** або клавіш (<— і —>) переміщення курсору змінює напрямок введення.


Space (пропуск) — заключає в рамку операнд і виводить курсор з виділеного виразу;

 **Математичні вирази не стільки набираються, скільки конструюються.**

При цьому враховується певна структура виразів та ієрархія операцій, що виконуються. Конструювання виразів полегшується засобами виділення окремих фрагментів виразів. Корисно пам'ятати, що все, що потрапляє у процесі виділення в куточки синього курсору, виявляється *операндом* для наступного *оператора*, який буде введений: оператори зведення в ступінь, витягнення кореня й розподіли є «чіпкими» операторами. Після їхнього уведення все, що набирається слідом, стає показником ступеня, підкореневим виразом або знаменником. Для припинення цього звичайно доводиться двічі натиснути клавішу **Space (Пропуск)**.

Натискання клавіші **Ins** змінює напрямок введення й розташування курсору, що дозволяє оперативно управляти введенням фрагментів формул. Наприклад, якщо курсор має вигляд J, то введення буде йти вправо (курсор як би «*підтримує*» вираз, який вводиться).

Для заміни числа або букви у виразі розташуйте маркер введення після цифри або літери й клацніть лівою клавішею миші. Маркер стане у вигляді куточка **J**. Оскільки він розташований праворуч від цифри або літери, то для стирання цієї літери натисніть клавішу <— (**Backspace**), а якщо він розташований ліворуч і має вигляд **L**, — то клавішу **Del**.

 **Натискання клавіші F3 забирає виділюваний фрагмент і розміщує його в буфер обміну Windows (операція - вирізати). Натискання клавіші F4 розміщує фрагменти з буфера в поточне положення курсора (вставити).**

Клавіші редагування і керування представлені у файлі «довідка **Mcad_klav.hlp**».

1.4 Оператори введення (присвоювання) і виводу результату

Інтерфейс користувача в середовищі Mathcad спирається на оператори введення й виводу значень змінних і виражень.

 **У середовищі Mathcad три оператори введення:**

A ← ■ – введення значення локальної змінної, область наочності якої, обмежена місцем введення змінної й кінцем обчислювальної процедури, яка

відзначена вертикальною рисою, що фіксує початок і кінець програмного блоку (використовується в режимі програмування).

$A :=$ - введення значення змінної, область якої - частина Mathcad-документа, розташована праворуч й нижче місця введення змінної. !(набір на клавіатурі – знак «=»).

$A \equiv$ ■ – введення значення глобальної змінної, область наочності якої – весь Mathcad-документ. ! (набір - [Shift + ~]).

Крім того, в Mathcad-документі можливі посилання на інший Mathcad-документ (на відповідний Mathcad-файл на диску – файл з розширенням *mcd*), змінні й користувальницькі функції якого стають наочними в поточному Mathcad-документі.

 У середовищі Mathcad існує два оператори виводу:

$A =$ ■ ■ – вивід числового значення змінної або вираз: на місці першого операнда з'являється числова константа, а на місці другого — відповідна розмірність, якщо константа розмірна (набір - (Ctrl + =);
 $A (:$ - вивід символьного значення змінної або виразу.

1.5. Керування обчисленнями

Автоматичний режим обчислень. Відразу після запуску Mathcad працює в автоматичному режимі, тоді відображується словом “авто” в рядку стану в нижній частині програмного вікна[2].

Автоматичний режим обчислень означає, що:

Відразу після введення символу “=” Mathcad робить обчислення “=” арифметичного виразу, який стоїть перед символом, і виводить на екран результат;

Відразу після щиглика мишею поза оператором присвоювання відбуваються наступні кроки:

* Mathcad обчислює значення виразу, що є в правій частині оператора присвоювання й привласнює цей результат змінній, яка стоїть в лівій частині оператора присвоювання;

* Mathcad оновлює результати обчислень, в яких бере участь змінна, значення якої змінилося на попередньому кроці, але тільки ті, які розташовані у вікні робочого документа в цей момент.

Щоб “змусити” Mathcad обчислити всі рівняння (після внесення змін), можна звернутися до меню **Інструменти** , команда **Обчислити**.

Для включення або відключення автоматичного режиму необхідно звернутися до меню **Інструменти** , команди **автоматичний режим**. Якщо режим включений, то ліворуч від імені цієї команди є значок “пташка”. Для вимикання досить клацнути мишею на цій команді (“пташка” зникне).

Ручний режим обчислень. Mathcad стежить за “відкладеними” обчисленнями, тобто відразу після внесення змін, що вимагають обчислень, у рядку повідомлень з'являється слово “Вич9”, яке нагадує про те, що

результати, наочні у вікні, не відповідають поточному стану робочого документа й мають потребу в перерахуванні для відновлення.

Увага

До ручного режиму обчислень доцільно переходити при внесенні численних змін у формули й вираз робочого документа.

Переривання обчислень. Щоб перервати процес обчислень, потрібно:

- * натиснути клавішу [Esc];
- * у діалоговому вікні, що з'явилося, клацнути на кнопці “OK” - для зупинки процесу обчислень - або на кнопці “Ні” - для його продовження.

Помилки обчислень. При обчисленні виразів Mathcad може виявити помилку й видати відповідне повідомлення (див. Додаток 5). Оскільки Mathcad не може обробити помилковий вираз, то вираз, який використовує змінну з помилками, також залишається невизначеним.

Для одержання інформації про виниклу помилку можна подивитися довідковий файл **mcad_error.hlp** або натиснути клавіші [Shift] + [F1] і клацнути мишею на повідомленні про помилку.

При виявленні помилки потрібно:

- * Визначити, яке з виразів з помилкою є “самим верхнім” у робочому документі (ця помилка може з'явитися причиною інших помилок);
- * якщо буде потреба, перейти на ручний режим, виправити помилку й натиснути [F9] - відбудеться перерахування значень з урахуванням внесених змін.

2. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

Лабораторна робота № 1. Базові обчислення і операції

Мета роботи: вивчити основи роботи, базові обчислювальні конструкції, змінні, вирази, функції, текстові блоки, можливості керування і редагування.

Основні відомості

1.1. Найпростіші конструкції системи MathCAD

Абетка вхідної мови системи визначає сукупність *спеціальних знаків і слів*, які використовуються при завданні команд, необхідних для вирішення завдань.

Абетка системи MathCAD містить:

- **рісі й великі латинські букви;**
- **рісі й великі грецькі букви;**
- **арабські цифри від 0 до 9;**
- **системні змінні;**
- **оператори;**
- **імена вбудованих функцій;**
- **спеціальні знаки;**
- **рісі й великі букви кирилиці (при роботі в середовищі русифікованої системи Windows).**

До більш великих елементів мови належать **типи даних, оператори, функції й керуючі структури**. Всі ці елементи властиві вхідній мові системи MathCAD, як і будь-якій іншій мові програмування.

До **типів даних** відносяться: **числові константи, звичайні й системні змінні, масиви (вектори й матриці) і дані файлового типу**.

- **Оператори** - елементи мови, за допомогою яких можна створювати математичні вирази. До них, наприклад, належать символи арифметичних операцій, знаки обчислення сум, добутків, похідної й інтеграла й т.д. Після визначення операндів (*параметрів операторів*) оператори стають блоками, які виконуються (**наведені в додатку 1**).

- **Функції** - мають особливу властивість - у відповідь на звертання до них по імені з вказівкою аргументу (або списку аргументів) вони повертають деяке значення — *символьне, числове, вектор або матрицю*.

Функції можуть (поряд з операторами) бути в математичному виразі. Наприклад, у вираженні : $Y = 2 \cdot \ln(x) + 1$,

Y - змінна, 1 й 2 - числові константи, $*$ й $+$ - оператори, $\ln(x)$ - вбудована функція з аргументом x .

- **Числові константи** - задаються за допомогою арабських цифр, *десятькової точки* (а не коми!) і знака — (мінус). Наприклад:

123 — цілочислена десяткова константа;

12.3 - і десяткова константа із дробовою частиною;


12.3*10⁻⁵ -- десяткова константа з мантиєю (**12.3**) і порядком — **5**.

Відзначимо, що знак множення $*$ на екрані змінюється на точку, а операція зведення в ступінь (із застосуванням спецзнака $^$) відображується шляхом надання порядку у вигляді *надрядкового елемента*. Більшість обчислень система виконує як з дійсними, так і з комплексними числами, які звичайно подаються в алгебраїчному вигляді:

$$Z = Re + i \cdot Im \text{ або } Z = Re + j \cdot Im$$

Тут **Re** -- дійсна частина комплексного числа **Z**, **Im** -- його мніма частина, а символи **i** або **j** позначають уявну одиницю, тобто корінь квадратний із -1 . Таке подання характерно й для системи *MathCAD* (за винятком того, що знак рівності не є знак присвоєння). Отже, якщо **Re** = 2, а **Im** = 3, то комплексна числова константа в системі *MathCAD* повинна бути задана у вигляді $2 + i \cdot 3$ або $2 + j \cdot 3$. Однак система не завжди знає, який символ застосувати для позначення мнімої одиниці. Тому перед використанням будь-яких операцій з комплексними числами корисно спочатку визначити **i** або **j** як уявну одиницю (тобто привласнити їм значення квадратного кореня з -1).

Особливий вигляд констант - розмірні. Крім свого числового значення вони характеризуються ще й вказівкою на те, до якої фізичної величини вони відносяться.

! Позначення одиниць вимірів можна не запам'ятовувати — для додатку одиниці виміру в будь-яке місце документа необхідно звернутися до піктограми меню **Вставка одиниць виміру** і в діалоговому вікні вибрати розмірність й одиницю виміру, після чого клацнути на кнопці **Вставити**.

Змінні - є поійменованими об'єктами, які мають деяке значення, що може змінюватися по ходу виконання програми.

Імена констант, змінних та інших об'єктів у системі *MathCAD* можуть мати практично будь-яку довжину, і в них можуть бути застосовані будь-які латинські й грецькі букви, а також цифри.


Однак починатися вони можуть тільки з букви, наприклад: **x, x1, alfa, X_coordinate**. Крім того, вони повинні бути злитими. Не можна використати для імені букви російської мови. *Русі й великі літери в імені розрізняються*.

В *MathCAD* є невелика група особливих об'єктів, які не можна віднести ні до класу констант, ні до класу змінних. Їх вірніше вважати *системними змінними*, що мають визначені системою початкові значення.

Нижче зазначені ці об'єкти й наведені їхні початкові значення (у дужках):

Об'єкт Уведення Призначення:

π	<i>Ctrl + P</i>	Число « <i>pi</i> » (3.14..)
e	<i>e</i>	<i>Основа</i> натурального логарифма (2.71..)
∞	<i>Ctrl + Z</i>	Системна нескінченність (10^{307})
%	<i>%</i>	Відсоток (0.01)
TOL		Похибка чисельних методів (0.001)
ORIGIN		Нижня межа індексації масивів (0)


 **Звичайні змінні відрізняються від системних тим, що вони повинні бути попередньо визначені користувачем, тобто їм необхідно хоча б один раз привласнити значення (використовується знак $:=$). До цього присвоювання змінна не визначена і її не можна використовувати.**

Змінні можуть використовуватися в математичних виразах, бути аргументами функцій або операндами операторів. В інших роботах будуть розглянуті особливі види змінних, зокрема **індексовані** (елементи векторів і матриць), а також змінні із заданими межами їхньої зміни (**ранжировані** або **дискретні** змінні).

Вбудовані функції:

Система *MathCAD* містить розширений набір *вбудованих елементарних функцій*. Функції задаються своїм ім'ям і значенням аргументу в круглих дужках. У відповідь на звертання до них функції повертають обчислені значення. Аргумент і значення функцій можуть бути дійсними або комплексними числами .

У Додатку 2 представлені ці функції, розбиті на шість груп.

 **Зверніть увагу, що більшість із цих функцій друкується малими латинськими буквами.**

- спеціальні математичні функції.

Поряд з елементарними функціями в системі *MathCAD* підтримується ряд вбудованих спеціальних математичних функцій (наведені в Додатку 2).

- Функції з умовами порівняння.

Існує ряд вбудованих функцій, в яких результат, що повертається ними, залежить від знака або значення аргументу. Так, при їхньому обчисленні

виконується порівняння аргументу з деякими числовими константами, наприклад, з нулем або цілими числами. Більш широкі можливості дає функція *if* для створення умовних виразів:



if (Умова, Вираз 1, Вираз 2)

Якщо в цій функції умова виконується, то буде обчислюватися Вираз 1, у протилежному випадку – Вираз 2. Зауважимо, що ця функція широко використовується в мовах програмування.

Функції користувача.

Функції користувача вводяться із застосуванням наступного правила:

Ім'я_функції (Список_параметрів):= Вираз

Ім'я функції задається як будь-який ідентифікатор, наприклад, ім'я змінної. У дужках вказується список параметрів функції; це перелік використаних у виразі змінних, розподілених комами. Вираз - це будь-який вираз, що містить доступні системі оператори й функції з операндами й аргументами, зазначеними в списку параметрів.

Приклади завдання функцій однієї і двох змінних:

***fun** (x):= 10·(1 – exp (x)); **module** (x, y) := $\sqrt{x^2 + y^2}$.*

***A** := 10 **fun** (x) := A((1 (exp (x)),*

(! змінна A повинна бути визначена до завдання функції).

Арифметичні вираз. Під арифметичними виразом розуміється конструкція, що складається з констант, змінних, імен функцій, знаків операцій і круглих дужок. Набір арифметичного виразу відбувається ліворуч праворуч з урахуванням *правила про пріоритет* операцій.

Арифметичний вираз після його обчислення приймає одне конкретне чисельне значення.



ЗАУВАЖЕННЯ:

- 1. Аргументами вбудованих функцій можуть бути константи, змінні, функції, вирази.*
- 2. Вираз в MathCADe - це сукупність імен змінних, чисел, функцій, з'єднаних знаками операцій і відносин.*
- 3. Всі параметри, які входять у вираз (якщо вони не є аргументами обумовленої функції), повинні бути задані перед виконанням оператора присвоювання.*

1.2. Введення простих виразів.

Побудова починається із вказівки місця розташування виразу в робочому документі. Для цього необхідно встановити курсор введення в те місце документа, звідки почнеться вираз й клацнути *лівою кнопкою миші*. Якщо це місце не належить зайнятим областям (текстовим або математичним), то на екрані з'являється хрестоподібний курсор і можна починати введення виразу.

Прості математичні вирази можна створювати, вводячи потрібну послідовність, тобто вводячи імена змінних, функцій, констант, круглі дужки та знаки арифметичних операцій.

Для завдання операції зведення в ступінь потрібно або ввести символ “^”, або натиснути кнопку “**Калькулятор**” на панелі кнопок **Математика**, а потім у меню символів, що з'явилося, клацнути на кнопці - ху.

Приклад 2.1 Обчислення виразів. Mathcad дозволяє обчислити значення окремого виразу. Для цього потрібно:

- Ввести вираз, наприклад, $2 * \sin(0.5)$
- Натиснути клавішу [=], після цього відбудеться обчислення й виведення результату: $2 \sin(0.5) = 0.959$

Приклад 2.2. Введемо рядок символів: $3/4 + 5^2 =$,

одержуємо результат $\frac{3}{4+5^2} = 0.103$

рамка синього кольору, яка виділяє при побудові формули, відіграє ту ж роль, що й курсор введення тексту в текстових редакторах.

Правило: Те, що знаходиться в рамці, стає операндом наступного оператора, який буде введенний.

Це правило пояснюється наступним прикладом.

Приклад 2.3. У робочому документі треба побудувати вираз

$$\frac{x-3*a^2}{-4+\sqrt{y+1}+2*y}$$

Подивимося, як використовується рамка на наступних кроках побудови цього виразу.

- Введіть $x-3*a^2$. Результат показаний у прямокутній рамці

$$x - 3 * a^2$$

При введенні цього виразу правила пріоритету дозволяли нам просто вводити символи один за одним. Але якщо далі натиснути /, то чисельником стане тільки число **2**, тому що після нього розташований курсор уведення |. Для того, щоб чисельником став весь вираз $x-3a^2$, слід використати рамку, яка виділяє вираз.

- Для того, щоб розташувати $x-3a^2$ у рамці, треба натиснути [пропуск] три рази, щоб рамка охопила вираз повністю

$$x-3*a^2$$

- Натисніть «/», щоб створити дробову риску

$$\frac{x-3*a^2}{\bullet}$$

- Введіть $-4 +$ і клацніть на кнопці “**Калькулятор на панелі Математика**”, а потім на символі $\sqrt{}$ й введіть $y+1$.

$$\frac{x-3*a^2}{-4+\sqrt{y+1}}$$

- * Щоб додати додаток поза знаком радикалу, натисніть двічі [Пропуск], а потім уведіть: $+2*y$.

$$\frac{x-3*a^2}{-4+\sqrt{y+1}+2*y}$$

Чіпкі операції. Операція розподілу, зведення в ступінь і витягнення кореня є *чіпкими операціями*. Це означає, що після введення однієї з цих операцій, все, що буде введено потім, буде частиною знаменника, показника ступеня або підкореневого виразу, доки явно не “покинути” цю операцію одним з наступних способів:

- * натиснувши клавішу [Пропуск];
- * натиснувши клавішу [↑];
- * клацнувши мишею поза виразом, який вводиться.

Приклад 2.4. Побудуємо в робочому документі вираз:

$$x^3 + \frac{1}{a+b} x^{c+d} - \sqrt{x+1} + 1$$

* Уведіть: **x^3[Пропуск]**. Зверніть увагу: Рамка, яка виділяє, **включає** x^3 :

* Введіть:

+1/a+b [Пропуск] [Пропуск]

* x^c+d[Пропуск] [Пропуск]

• Введіть:

−√x+1 [Пропуск] [Пропуск]

• Введіть +1, щоб

завершити вираз

$$x^3 + \frac{1}{a+b} x^{c+d} - \sqrt{x+1} + 1$$

Завдання 2.1. У поточний документ ввести наступні арифметичні

вирази: $\frac{1}{\frac{1}{a+b} + a+b} * \sqrt{c+d}$; $\frac{c+d^{2+x}}{2+c} * 2 * \sqrt{2+x^2} + 3$

Зауваження: Якщо при побудові виразу був введений невірний символ, то його можна видалити в такий спосіб:

* клацнути мишею під невірним символом, щоб з'явився вертикальний курсор вставки;

* використовуючи клавіші [Delete] або [Backspace], видалити символ й ввести правильний

1.3. Редагування виразів формул і тексту

Виділення арифметичних виразів і формул

Виділення є важливим засобом при редагуванні робочого документа. Під виділенням виразу будемо розуміти операцію виводу всього вираз або окремих його частин (тобто операндів) у рамку, яка виділяє (ВР).

Для керування розміром і положенням рамки, яка виділяє вираз, використовуються клавіші, які описані в п. 1.4 й у прикладах вище:

Редагування виразів

Засоби редагування. Редактор формул використовує три засоби для редагування формул, які відрізняються за зовнішнім виглядом. Один з цих засобів обов'язково присутній на екрані. **Ці засоби описані в п. 1.4.**

Зміна імені й числа. Розмістіть курсор введення в потрібному місці. При необхідності для зсуву курсору натисніть [\leftarrow] або [\rightarrow]. Потім здійснійте редагування як у звичайному тексті.

Заміна арифметичної операції. Головне в цій заміні - розташувати рамку, яка виділяє, перед знаком операції. Потім натиснути клавішу [Delete] - замість знака операції з'явиться порожня рамка - і ввести новий знак операції.

Вставка арифметичної операції. Простіш за все це можна здійснити між двома буквами або цифрами. Для цього необхідно розташувати курсор в потрібне місце й натиснути клавішу з позначенням операції, яку треба вставити.

Також просто вставити операції, що вимагають один операнд, наприклад квадратний корінь. Для цього спочатку візьміть у рамку весь операнд і введіть потрібну операцію.

Небагато складніше вставити операцію таким чином, щоб вираз став іншим операндом. Для цього візьміть у рамку цей вираз, натисніть клавішу [Ins] - рамка, яка виділяє стає червоною і її зрізаний кут став верхнім лівим. Це означає, що тепер вміст рамки стане другим операндом. Потім введіть потрібний знак операції (рамка перемістилася від знака операції на місце першого операнда) і введіть потрібний перший операнд.

Видалення арифметичної операції. Для видалення операції, що з'єднує два операнди, необхідно розташувати синій курсор вставки після знака операції й натиснути [BackSpace] або помістити курсор перед знаком і натиснути [Delete].

Для видалення операції над одним операндом (наприклад, \sqrt{x} , $|x|$ і т.д.) необхідно поставити курсор після знака $\backslash Lx$ (тобто перед операндом) і натиснути клавішу [Backspace].

Застосування функції до виразу. Мається на увазі перетворити деякий вираз на аргумент функції.

Приклад 3.1. $\omega t + 2$ перетворити в $\cos(\omega t + 2)$.

Для цього розмістіть вираз в рамці, і для вставки двосторонніх дужок натисніть клавішу з одиночними лапками. Потім натисніть [Пропуск] - рамка, що виділяє, охопить і дужки, натисніть клавішу [Ins] і напишіть ім'я функції. Якщо функція є вбудованою, то потрібно звернутися до пункту Вставка, команди Вставити функцію.

Вставка дужок. Щоб укласти необхідний вираз в пару дужок, необхідно укласти цей вираз в рамку, що виділяє, і натиснути клавішу з одиночними лапками.

Якщо потрібно вставити одну дужку, то це виконується установкою курсору введення в потрібне місце й введенням символів “(“або”)”.

Видалення дужок. Для видалення пари дужок можна використати один з наступних способів:

- Укласти вираз, оточений круглими дужками, в рамку та натиснути клавішу [Delete].
- Помістити курсор введення праворуч від лівої кнопки і натиснути клавішу [Backspace] - обидві дужки будуть видалені.

Переміщення частин виразів. Для редагування складних виразів корисні наступні команди з пункту **Виправлення**:

- **Вирізати** - видаляє вміст із рамки, яка виділяє, і переносить його в буфер обміну;
- **Копіювати** - заносить вміст рамки, що виділяє, у буфер обміну зі збереженням його в рамці, що виділяє.
- **Вставити** - розміщує вміст буфера у виділене поле введення.

Приклад 3.2. Замінити знак “-” на + у чисельнику виразу прикладу 2.3.
Для цього виконаємо наступні кроки:

- Клацнемо мишею на знаку “чисельника” як на провідній операції

$$\frac{x - 3a^2}{-4 + \sqrt{y+1} + 2y}$$

- Натиснемо клавішу [Delete], це замінить знак “-” порожнім полем. Повторне натискання [Delete] видалить чисельник повністю.

$$\frac{x - 3a^2}{-4 + \sqrt{y+1} + 2y}$$

- Натиснемо клавішу “+” - редактор формул вставить операцію додавання.

$$\frac{x + 3a^2}{-4 + \sqrt{y+1} + 2y}$$

Приклад 3.3. Необхідно ввести в робочий документ вираз:

$$\cos(\omega t + \varphi) + \sin(\omega t + \varphi)$$

Аргумент синуса збігається з аргументом косинуса. Скористаємося цією обставиною, проробивши наступні кроки:

- Введемо вираз, залишивши порожнім поле уведення для аргументу синуса.

Виділимо аргумент косинуса

$$\cos(\omega t + \varphi) + \sin()$$

- Звернемося до пункту **Виправлення** – команди **Копіювати**
- Клацнемо мишею в поле введення
- Звернемося до пункту **Виправлення** команди **Вставити**

$$\cos(\omega t + \varphi) + \sin(\omega t + \varphi)$$

Вигляд виразу показаний праворуч.

Зазначимо, що використовуючи команду **Вирізати**, можна також видаляти взяті у рамку окремі частини виразу.

Зміна взаємного розташування областей.

Часто при компонуванні документа Mathcad виникає необхідність змінити розташування формул, графіків, тексту.

Виділення областей. Перш ніж копіювати або переміщувати області, їх необхідно виділити. Для цього:

- *Натисніть і не відпускайте ліву кнопку миші для фіксації “стартового” кута прямокутника, який виділяє.*
- *Не відпускаючи кнопки миші, переміщуйте пунктирний контур прямокутника, який виділяє, включаючи в нього потрібні області.*
- *Коли прямокутник охопить потрібні області, відпустить кнопку миші. Всі обрані області будуть укладені в пунктирні прямокутники.*

Копіювання областей. Після того, як у робочому документі з’явилися виділені області, можна копіювати їх в інші місця документів. Для цього досить:

- *Вибрати пункт **Виправлення**, команда **Копіювати**, щоб скопіювати області в буфер обміну;*
- *клацнути мишею в тому місці, куди потрібно помістити копію областей. Це місце може перебувати як у тому ж документі, так і в іншому; воно повинне бути вільним від інших областей - курсор здобуває хрестоподібну форму.*
- *Звернутися до пункту **Виправлення**, команди **Вставити**.*

Переміщення областей. Це можна здійснити за допомогою команд **Вирізати, Вставити**.

- *Виділити області, які будуть переміщуватися;*
- *звернутися до пункту **Виправлення**, команді **Вирізати**;*
- *клацнути мишею там, куди потрібно помістити виділені області. Це місце повинне бути вільним від інших областей - курсор прийме вигляд хрестоподібного курсору.*
- *Звернутися до пункту **Виправлення**, команди **Вставити**.*

Видалення областей. Щоб видалити з робочого документа одну або кілька областей із занесенням їх у буфер обміну потрібно:

- *Виділити області, які мають бути видалені..*
- *Звернутися до пункту **Виправлення**, команди **Вирізати**.*

Вирівнювання областей. Для поліпшення зовнішнього вигляду створеного документа можна вирівнювати області по вертикалі й горизонталі.

При звертанні до пункту **Вирівняти області** команди **Вертикально** відбувається наступне:

- *Mathcad проводить невидимі вертикальні лінії через ліві границі самої правої та самої лівої з виділених областей, потім проводить вертикальну лінію посередині між цими двома лініями.*
- *Всі виділені області переміщуються таким чином, щоб їхні ліві межі розташувалися на цій лінії.*

Команда **Горизонтально** пункту **Вирівняти області** діє аналогічно, тільки вирівнювання відбувається по верхніх межах областей.

<p>Увага! Необережне вирівнювання областей може призвести до їхнього перекриття. Якщо, наприклад, виділені області розташовані по горизонталі,</p>

то виконання команди **Вертикально** може призвести до накладення областей.

Відділення областей. При переміщенні й редагуванні областей вони можуть бути накладені одна на одну. Перекриття областей не впливає на процес обчислень, але погіршує читання документа.

Перекриття областей можна легко побачити виконавши: меню **Вид**, команда **Області**. Області відображаються на екрані білими кольорами, а вільний простір - сірим. Для поділу областей варто звернутися до пункту **Формат**, команди **Відокремити Область**. Ця команда переміщує області, які перекриваються, таким чином, що порядок проведення обчислень залишається колишнім, але області не перекриваються.

Увага! Іноді доцільніше “ручне” поділ областей, переміщуючи області описаними вище способами й додаючи, при необхідності, порожні рядки.

Вставка й видалення порожніх рядків. Для вставки в документ одного або кількох порожніх рядків, необхідно:

- *Клацнути мишею на порожньому рядку, вище якого вставляються чисті рядки, і натиснути **Enter**.*

Щоб видалити з документа порожні рядки, потрібно:

- *Клацнути мишею вище порожніх рядків, які потрібно видалити, і натиснути **Del**.*

1.4. Створення текстової області

Для розміщення текстових фрагментів між рівняннями й графіками в робочому документі можна створювати текстові області.

Створення текстової області. Щоб створити текстову область, потрібно:

* *Клацнути мишею на вільному місці, де передбачається почати текстову область. Звернутися до пункту **Вставка** команди **Текстова область** або натиснути клавішу **A** на панелі інструментів. При цьому хрестоподібний курсор перетворюється в курсор введення (тобто у вертикальну риску).*

* *Почати вводити текст, що відображується на екрані в текстовій рамці. Розміри цієї рамки збільшуються в міру введення тексту. При досягненні рядком правого поля або краю сторінки здійснюється перенесення на наступний рядок. Натиснення клавіші **[Enter]** переводить курсор у початок наступного рядка - твердий перенос рядка.*

* *Для виходу з текстової області потрібно виконати одну з дій: клацнути мишею поза текстовою областю або натиснути клавіші **Ctrl+ [Shift] + [Enter]**.*

• *Щоб вставити текст в існуючу текстову область, необхідно клацнути мишею між символами в текстовій області - з'явиться текстова рамка, яка обрамляє весь текст, а потім ввести потрібні символи, які з'являться за курсором введення. Також можна замінити текст, перейшовши в режим заміни, для включення якого натиснути клавішу **[Ins]**.*

Редагування тексту.

Видалення і копіювання текстових фрагментів. Для видалення виділених фрагментів використовується команда **Вирізати**, для копіювання застосовуються команди **Копіювати**, **Вставити**.

Зміна шрифтів тексту. Спочатку при введенні тексту накреслення шрифту і його розмірів визначаються установками, прийнятими в робочому документі за замовчуванням. Для зміни шрифту в набраному тексті необхідно:

- * Виділити фрагмент, *шрифт* якого потрібно змінити.
- * У панелі **Форматування** встановити шрифт, стиль, розмір, кольори символів, а також можна вказати при необхідності нижній або верхній індекс.

Грецькі символи в тексті. Для введення грецьких букв у текстову область можна використати такий спосіб:

- * *клацнути на кнопці [αβ] у панелі кнопок Математика;*
- * *у діалоговому вікні Символи клацнути на кнопці із зображенням символу, який потрібно ввести.*

Завдання й хід роботи

1. Прочитати основні відомості. Відповісти на запитання викладача.

2. Запустити MathCad. У новому документі. Виконати приклади.

3. На початку документа ввести текст:

Лабораторна РОБОТА 1. Базові (прості) обчислення й операції
Ф.І. група

4. Відкрити заданий документ Lab01.mcd.

У меню **Вікна** (Window) задати **Вертикально**. У своєму документі (в правому вікні) продовжувати виконувати набір прикладів і завдань, читаючи вказівки в документі ліворуч.

5. Зберегти свій остаточний документ і вийти з програми.

Лабораторна робота № 2. Ранжировані (дискретні) змінні. Ітераційні обчислення.

Основні відомості

Ранжировані змінні — це змінні, які приймають серію значень із заданого діапазону при кожному використанні. За допомогою цих змінних ви маєте змогу виконати цикл - багаторазово обчислити те саме вираз для різних значень змінної з діапазону. Результати обчислення можуть бути записані в масив і відображені у вигляді вектора (матриці), таблиці або графіка.

Ранжирована Змінна задається в такий спосіб:

ім'я_змінної := вираз1.. вираз N

або

ім'я_змінної := вираз1, вираз2.. вираз N


Тут, *1* — початкове значення змінної,

вираз2 — друге значення змінної,

вираз N — останнє значення змінної,

різниця (*вираз.2 - вираз.1*) задає крок зміни змінної.

Якщо вираз.2 не задано, то крок приймається рівним 1.

 Зауважимо, що всі вхідні у вираз1, вираз2, вираз N параметри повинні бути визначені до використання.

Введення символу «..» здійснюється за допомогою клавіші «;» (точка з комою). Наприклад, $x: 1.5; 40.56$ виглядає як $x := 1.5.. 40.56$. Тепер змінна x буде мінятися від 1.5 із кроком 1 доти, доки не перевищить значення 40.56.

Приклад 2.1. Потрібно задати дискретний аргумент Z , що змінюється від 1.1 до 3.3 із кроком 0.2.

Для цього із клавіатури ввести символи:

$Z: 1.1, 1.3; 3.3$

На екрані з'явиться конструкція

$Z := 1.1, 1.3..3.3$

Зауважимо, що крок зміни дискретного аргументу визначається як різниця між другим і початковим значенням, вказаним у завданні дискретного аргументу. У прикладі 4.1 крок дорівнює $1.3 - 1.1 = 0.2$. Також крок може бути від'ємною величиною.

Приклад 2.2. Дискретний аргумент, заданий конструкцією $y := 2.8, 2.7..1$ змінюється із кроком - 0.1 від 2.8 до 1.

Якщо крок зміни дорівнює 1, то друге значення аргументу можна не вказувати.

Приклад 2.3. Дискретний аргумент, заданий конструкцією $k:=1..10$ змінюється від 1 до 10 із кроком 1; у цьому випадку із клавіатури вводяться наступні символи **$k:=1;10$**

Зауваження: Якщо дискретний аргумент використовується у виразі, то Mathcad обчислює цей вираз для кожного значення дискретного аргументу.

Індексовані змінні й ітерації

Позначенням індексованої змінної є ім'я змінної з вказівкою індексу (індексів). Завдання індексованої змінної здійснюється за допомогою оператора присвоювання:

$ім'я_індексованої_змінної := вираз$

При цьому діапазон зміни індексу (індексів) повинен бути заздалегідь заданий. Наприклад,

1) $j:=1..5 \quad y_i:=x_i \sin [x_j]$

2) $i:=1..3 \quad j:=1..3 \quad a_{i,j}:=i+j$

Також значення індексованих змінних можна обчислювати за ітераційними формулами. Наприклад,

$i:=1..5 \quad z_i:=1 \quad z_j:=z_{j-1}+1.2$

 **Щоб ввести значення індексованої змінної у вигляді таблиці:**

1) Задайте діапазон зміни індексної змінної (наприклад, $i:=1..10$).

2) Уведіть індексовану змінну, наприклад x_i .

3) Уведіть оператор присвоювання $:=$.

4) Уведіть елементи таблиці (числа, вираз), розділяючи їх комами.

Зауваження:

1. При завданні індексованої змінної з двома індексами пам'ятайте, що першим змінюється другий індекс.
3. Щоб одержати(**вивести**) значення виразів, що містять змінні індекси, або значення індексованих змінних у вигляді таблиці, досить ввести вираз (індексовану змінну) і слідом за ним знак рівності (**Ctrl + =**).

Завдання і хід роботи

1. Відкрити новий документ написати назву теми лабораторної роботи й виконати приклади 2.1 -2.4.
2. **Відкрити заданий документ mcad_Lab02.mcd.**
У меню **Вікна** (Window) задати **Вертикально**. У новому документі (у правому вікні) продовжувати виконувати набір прикладів й обчислень , читаючи вказівки в документі ліворуч.
3. Показати результати викладачеві. Зберегти документ і вийти з програми.

Контрольні питання

1. За допомогою якого оператора можна обчислити вираз?
2. Як вставити текстову область у документ Mathcad?
3. Чим відрізняється глобальне й локальне визначення змінних? За допомогою яких операторів визначається?
4. Як змінити формат чисел для всього документа?
5. Як змінити формат чисел для окремого вираз?
6. Які системні (визначені) змінні Вам відомі? Яке їхнє значення? Як змінити їхнє значення?
7. Які види функцій в Mathcad Вам відомі?
8. Як вставити вбудовану функцію в документ Mathcad?
9. Як визначити дискретні змінні з довільним кроком? Яким буде крок за замовчуванням?
10. Як визначити індексовану змінну?

Лабораторна робота № 3. Обчислення сум, добутків, похідних та інтегралів.

Основні відомості

Обчислення сум. Для обчислення сум використовують оператор підсумовування, який має вигляд $\sum_{i=m}^n x$ і виконує підсумовування величини x для значень індексу $i=m, m+1, \dots, n$. Величини m, n — цілі константи й змінні, $m \leq n$, а x — будь-яке вираз, у більшості випадків залежне від індексу підсумовування.

Для введення оператора підсумовування в робочий документ необхідно виконати наступні кроки:

- Клацнути мишею в потрібному місці робочого документа й натиснути клавіші [Ctrl] + [Shift] + [4]. З'явиться знак підсумовування із чотирма вільними полями.
- У нижнє поле ліворуч від знака “=” введіть ім'я змінної - індекс підсумовування. Ця змінна визначена тільки всередині оператора підсумовування. Поза оператором може існувати інша змінна з тим же ім'ям. Для введення досить укласти її в рамку і ввести ім'я.
- У поле праворуч від символу “=” уведіть ціле число, цілую змінну, цілую змінну або ціле вираз, що приймають ціле значення. Ця величина буде визначати початкове значення індексу підсумовування.
- У верхнє поле введіть ціле число, цілую змінну або цілий вираз, що визначає верхню границю для індексу підсумовування.
- У поле символу підсумовування введіть вираз, що визначає доданки, які треба підсумувати.

Зауважимо, що використовуючи цей же прийом, можна обчислювати й подвійні суми.

Приклад 3.1. Наведемо фрагменти робочого документа, що ілюструють використання оператора підсумовування

$m :=$ $n :=$ $i := 0 \dots 20$

$$z := \sum_{n=0}^{20} n \quad z = 210 \quad \sum_{i=m}^n i^2 = \quad \boxed{x_i := \text{Sin}(0.1 * i * \pi)}$$

$$\sum_{n=0}^{20} x_n * n = -63.138 \quad \sum_{n=0}^{20} \sum_{m=0}^{10} n^m = 2.554 * 10^{13}.$$

Завдання 3.1. Складіть робочий документ для обчислення сум математичне очікування й дисперсії випадкової величини x .

$$m_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$D_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_x), \quad n = 100$$

Масив x сформуєте шляхом звертання до функції ***rnorm***(n , m , d), що генерує випадковий вектор довгої n , проекція якого підкоряється нормальному розподілу із середнім m і дисперсією d , тобто

$$x := \text{rnorm}(n, 0, 1)$$

Зауваження 1. При обчисленні подвійних сум внутрішній оператор підсумовування може мати змінну верхню границю.

Приклад 3.2:

$$\sum_{i=1}^7 \sum_{m=1}^i m = 84 ;$$

$$\sum_{j=1}^{20} \sum_{m=1}^j m = 1.54 * 10^3 ;$$

Обчислення добутків

Для обчислення добутку використовується оператор добутку, що має

вигляд $\prod_{i=m}^n x$ і обчислює добуток співмножників x для значень індексу $i = m, m+1, \dots, n$.

Величини m, n — цілі константи або змінні, $m \leq n$, а x — будь-яке арифметичний вираз, у більшості випадків залежний від індексу i .

Для введення оператора добутку необхідно спочатку клацнути мишею в потрібному місці робочого документа, натиснути клавіші [Ctrl] + [Shift] + [3], а потім заповнити чотири порожні поля так, як в операторі підсумовування.

Приклад 3.3. Наведемо деякі фрагменти робочого документа з оператором добутку.

$$\prod_{n=0}^{20} (n + 1) = 5.109 * 10^9$$

$$g(n) := \frac{1}{n^2} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^i i^2$$

Відзначимо, що функція $g(n)$ — локальна функція, що обчислює подвійний добуток зі змінною верхньою межею.

Обчислення похідних. Оператор похідної обчислює значення похідної від функції $f(x)$ у точці x .

Для введення оператора похідної необхідно виконати наступні кроки:

- натиснути клавішу [?]. З'явиться оператор похідної з двома полями.
- У нижнє поле введіть ім'я змінної, за якою робиться диференціювання.
- У праве поле введіть вираз, який потрібно диференціювати.

Зрозуміло, що значення змінної диференціювання (тобто значення x), повинне бути визначене до оператора диференціювання.

Приклад 3.4. Наведемо фрагменти, що використовують оператори диференціювання:

$$x := 2$$

$$y := 10$$

$$\frac{d}{dx} x^5 = 79.999 \quad (\text{точне значення } 80)$$

$$\frac{d}{dy} x^5 y = 31.999 \quad (\text{точне значення } 32)$$

$$\left. \begin{array}{l} d(x) := 5 * x^4 \\ f(x) := \frac{d}{dx} d(x) \end{array} \right\} \text{ Використовуються локальні функції}$$

$$f(-2) = -160$$

$$f(x) = 160$$

$$f(4) = 1.28 * 10^3$$

Для введення оператора диференціювання n -го порядку ($1 < n$) необхідно:

- Натиснути клавіші [Ctrl] + [?], або вибрати з панелі інструментів оператор диференціювання з трьома порожніми полями;

- У верхнє поле введіть порядок похідної $n(n(5))$;
- У нижнє поле введіть ім'я змінної диференціювання;
- У праве поле введіть вираз, які потрібно диференціювати.

Приклад 3.5. Наведемо фрагменти, що використовують оператори диференціювання n -го порядку: $x := 2$

$$\frac{d^3}{dx^3} x^9 = 3.226 * 10^4$$

$$g(x) := x^9$$

$$f(n) := \frac{d^n}{dx^n} g(x)$$

$$f(x) = 3.226 * 10^4 \quad f(1) =$$

Обчислення визначених інтегралів

Для чисельного обчислення визначеного інтеграла призначений оператор інтегрування. Для введення оператора інтегрування необхідно виконати наступні кроки:

- Клацнути мишею в потрібному місці робочого документа і натиснути клавішу [&]. З'являється знак інтеграла з чотирма порожніми полями для меж інтегрування (два поля), підінтегрального виразу й змінної інтегрування.
- Заповнити порожні поля.

Зрозуміло, що всі змінні, які є в підінтегральному вираженні (крім змінної інтегрування), повинні бути визначені до оператора інтегрування.

Приклад 3.6. Наведемо фрагменти, що використовують оператор інтегрування, у тому числі й зі змінною верхньою межею інтегрування.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)^4 dx = 0.143$$

$$f(x) := x^2 + 3 * x + 2$$

$$g(x) := \int_0^y F(x) dx$$

$$g(0) = 0 \quad g(x) = 3.833 \quad g(5) = 89.167$$

Завдання і хід роботи

1. Відкрити новий документ написати назву теми лабораторної роботи й виконати приклади 3.1 -3.6.
2. Відкрити заданий документ Lab03.mcd.
У меню **Вікна** (Window) задати **Вертикально**. У новому документі (у правому вікні) продовжувати виконувати усі приклади й обчислення, читаючи вказівки в документі ліворуч.
3. Виконати розрахунки для різних числових даних.

Лабораторна робота № 4. Вектора й матриці. Дії з масивами

Основні відомості

Створення вектора або матриці

Перед обробкою масиву необхідно його створити. Є три способи створення масиву:

1. Введення масиву із клавіатури. Для цього необхідно:

- клацнути мишею в місці, де буде розташований вектор;
- звернутися до пункту **Математика**, команді **Матриці** (або натиснути [Ctrl] + [M]);
- у діалогове поле “Рядків” ввести число рядків матриці або число елементів вектора, а в поле “Стовпці” ввести число стовпців матриці, (для вектора вводимо 1);
- клацнути на кнопці **Створити**;
- переходячи від одного порожнього поля до іншого, заповнюємо їх, вводячи потрібні чисельні значення з клавіатури. Перехід здійснюється або щигликом миші на новому полі, або натисканням клавіші [Tab].

2. Інший варіант уведення масиву із клавіатури використовує дискретний аргумент. Для цього необхідно:

- *задати дискретний аргумент;*
- *надрукувати ім'я масиву й нижній індекс, що збігається з дискретним аргументом;*
- *ввести символ “:” - на екрані з'явиться знак “:=”;*
- *ввести через кому потрібну кількість (обумовлене діапазоном зміни дискретного аргументу) чисельних значень елементів масиву.*

Приклад 4.1. Необхідно ввести з клавіатури вектор $x = [2, 8, -10]$.

Введемо символи: **i:0;2** на екрані


нижче цієї конструкції

x[i: на екрані

- далі через кому вводимо 2, 8, -10.

i:=0..2

x_i :=

 **Зауваження.** Число елементів, які вводять з клавіатури, не повинне перевищувати 50. Для введення більше 50 елементів масиву потрібно “поділити” його на частині й вводити вроздріб.

Наприклад: конструкції

j1 := 0..29

x_{j1} :=

j2 := 30..80

x_{j2} :=

дозволяє ввести 81 елемент вектора x.

3. Завдання елементів масивів аналітичними виразами. Коли відомі аналітичні вирази, що визначають значення елементів масиву, то задаються дискретні аргументи, діапазон яких визначається індексами елементів, і використовується оператор присвоювання, у лівій частині якого перебуває ім'я масиву з індексами, а в правій - аналітичний вираз.

Приклад 4.2. Потрібно сформувати матрицю a , елементи якої визначаються виразом

$$a_{ij} = i^2 + j, \quad i=1,4; \quad j=1,3.$$

У такий спосіб матриця має розмір 4×3 . З урахуванням нульового рядка й стовпця в робочому документі вміщуємо конструкції:

$$i:=0..3 \quad j:=0..2$$
$$a_{ij}:=(i+1)^2 + (j+1)$$

Додавання по одиниці до дискретних аргументів забезпечує необхідну залежність значення елемента від номера рядка й стовпця.

При цьому введення конструкції:

$$i:=1..4 \quad j:=1..3$$
$$a_{ij}:=i^2+j$$

формує масив розміром 5×4 (пояснить, чому?) нульовий рядок і нульовий стовпець якого не визначені, а самі елементи залежать від індексів (при звичайній індексації від 1), у такий спосіб:

$$a_{ij}=(i-1)^2+(j-1), \quad i=2,..,5, j=2,4$$

Зміна розміру матриці (шляхом вставки й видалення рядка або стовпця).

Для цього необхідно виконати наступні кроки:

- клацнути мишею на одному з елементів змінюваної матриці, щоб укласти його в рамку.. Mathcad починає вставку або видалення із цього елемента;
- звернутися до пункту **Математика** команди **Матриці**;
- у діалоговому вікні, що з'явилося, ввести число рядків й/або стовпців, які потрібно вставити або видалити, й клацнути на відповідній кнопці **Вставити** або **Видалити**.


Якщо вставляються рядки, то Mathcad створює порожні рядки нижче обраного елемента, а якщо стовпці - то уставляються порожні стовпці праворуч від обраного елемента. Для вставки рядка вище верхнього або стовпця ліворуч першого необхідно всю матрицю укласти в рамку (клацнути на будь-якому елементі й кілька разів натиснути $\left[\uparrow\right]$ клавішу) , а потім звернутися до **пункту Математика**, і продовжити так, як описано вище.

При видаленні - Mathcad починає з рядка або стовпця, в яких перебуває виділений елемент. Видалення рядків відбувається вниз від цього елемента, а стовпців - праворуч від цього елемента.

Звертання до елементів масивів

Для звертання до окремих елементів масиву використовують нижні індекси, а до окремого стовпця матриці - верхній індекс.

Щоб увести нижні індекси потрібно натиснути клавішу [(ліва квадратна дужка), а потім розташувати в полі число (для вектора) або пару чисел (для матриці). Для вставки верхнього індексу натиснути [Ctrl] + [6] й увести ціле число, що означає номер стовпця.

 **Зауваження 1.** Елементи вектора й матриці нумерують, починаючи з нульового рядка й нульового стовпця. Ці нульові значення задаються “за замовчуванням” вбудованої змінної ORIGIN.

Приклад 4.3. Нехай визначена матриця a і вектор x :

$$a = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}, \quad x = \begin{vmatrix} 4 \\ 8 \\ 10 \end{vmatrix}.$$

Тоді: $a_{0,0}=2$; $a_{1,1}=6$; $a_{1,2}=7$; $x_0=4$; $x_2=10$

Для скасування «нульової» індексації необхідно змінити значення вбудованої змінної *ORIGIN*. Для цього необхідно звернутися до пункту **Математика**, команди **Убудовані змінні** й замінити в списку, що з'явився, значення змінної *ORIGIN*, наприклад, задавши значення 1. У цьому випадку нумерація рядків і стовпців починається від 1.

Для звертання до потрібного елемента вектора необхідно ввести ім'я вектора, символ “[” і чисельне значення індексу.

Наприклад, увівши символи **x[0=** на екрані одержимо чисельне значення нульового елемента масиву *x* (див. приклад 4.1) **x₀ = 4**

Використовуючи оператор присвоювання, можна замінити значення елементів вектора. Наприклад, увівши **x[2:20**, одержуємо на екрані оператор присвоювання **x_{2:=20}**, що змінює чисельне значення 10 вектора *x* (див. приклад 4.1) на значення 20.

Для звертання до елемента матриці необхідно ввести ім'я матриці, символ “[” і чисельні значення двох індексів, відокремлених комою. Перший індекс визначає номер рядка, а другий - номер стовпця на перетинанні яких розташований потрібний елемент матриці.

Наприклад, увівши символи **a[1,2=** на екрані одержимо конструкцію **a_{1,2=}** і чисельне значення елемента масиву *a* (див. приклад 4.1), рівне 7.

В якості індексів можуть також використовуватися дискретні аргументи. Однак їхній діапазон повинен складатися тільки із цілих чисел, що збігаються зі значеннями індексів елементів масивів.

Елементи матриці визначаються значеннями двох індексів, тому для “перебору” елементів матриці потрібно використовувати два дискретних аргументи, один з яких визначає номер рядка, а другий - номер стовпця. Аргумент, завдання якого розташовано в документі “раніше” - назовемо *зовнішнім*, а другий аргумент - *внутрішнім*. Зміна значень цих двох дискретних аргументів визначається наступним правилом: для кожного значення зовнішнього аргументу внутрішній аргумент змінює всі значення з діапазону своєї зміни.

Приклад 4.4: Записавши в робочому документі конструкції

i:=1..2 j:=1..3

i - зовнішній аргумент

i * j =

j - внутрішній аргумент

одержимо

1
2
3
2
4
6


Верхні індекси й стовпці матриці. Щоб звернутися до всього стовпця матриці, необхідно:

- ввести ім'я матриці;
- натиснути клавіші [Ctrl]+[6];
- ввести номер стовпця і для виводу режиму введення номера натиснути [Пропуск].

Приклад 4.5. Вивести на екран чисельні значення другого стовпця матриці *a* з прикладу 4.1.

Для цього в документ потрібно ввести наступну конструкцію:

$$a^{<2>} = \text{і одержимо результат } \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

 **Зверніть увагу :** номер стовпця 2, а виводиться третій - внаслідок нумерації з нульового стовпця (див. зауваження 1).

Основні операції над масивами і їхніми елементами.

У наведених нижче прикладах використовуються наступні масиви:

$$\text{— матриця } A = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 10 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{— вектор } z = \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{vmatrix}$$

Операції над елементами масивів. У цьому випадку арифметичні вираз або оператори присвоювання містять елементи масивів з відповідними індексами. Наведемо кілька фрагментів робочого документа, які ілюструють ці операції (нумерація рядків і стовпців від нуля):

- виведення значень елементів

$$A_{1,0} = 10 \quad Z_2 = 7;$$

- присвоювання значень елементів


$$A_{2,1} := Z_0 \quad Z_1 := A_{0,0};$$

- присвоювання значень у циклі $i := 0..2 \quad A_{0,i} := Z_i.$

Після виконання цього фрагмента нульовий стовець матриці *A* (вихідні значення 2, 10, 6) буде змінений на значення 3, 5, 7 елементів вектора *Z*;

- введення значень у циклі

$$i := 0..2 \quad A_{1,i} = \begin{matrix} 8 \\ 4 \\ 5. \end{matrix}$$

 **Зауваження .** Найчастіша помилка при роботі з елементами масиву — вихід за межі масиву. Наприклад, при звертанні до елемента масиву з індексом, меншим чим значення ORIGIN, призведе до помилки і появи повідомлення про це - “**індекс поза межами**”. Аналогічна помилка припущена в наступному фрагменті робочого документа :

$$i := 0..3 \quad A_{0,i} := Z_i$$

Операції над векторами - стовпцями матриці. Такі структури використовуються в операторах присвоювання при виводі. Наведемо кілька фрагментів робочого документа, які ілюструють такі операції:

- присвоєння елементам вектора *Z1* значень вектора *Z*

$Z1 := Z;$

- виконання арифметичних операцій додавання і вирахування

$z2 := Z + Z1.$

Якщо в якості операнда є константа або інша змінна, то можуть використовуватися всі чотири арифметичних операції. Наприклад:

$Z2 := 2 * Z \quad Z3 := Z / 2.5$

- операції над стовпцями матриці:

$Z3 := A^{<0>}$ (вектор Z одержує значення 2, 10, 6);

- висновок стовпця матриці:

$$A^{<1>} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix};$$

— обчислення скалярного добутку $S1 := Z * Z$ (квадрат довгі вектора), $S2 := Z * A^{(0)}$ (скалярний добуток вектора Z і нульового стовпця матриці A).

Зауважимо, що результатом такої операції множення є проста змінна.

Нагадаємо, що для введення номера треба натиснути клавіші [Ctrl] + [6] і ввести в поле, що з'явилося, номер стовпця.

Операції над матрицями. Деякі з арифметичних операцій, застосовані до матриць, набувають особливого сенсу. Так, операція додавання, застосовна до матриць, означає поелементне додавання двох матриць. При виконанні арифметичних операцій над матрицями необхідно пам'ятати про вимоги до числа рядків і стовпців матриць-операндов, наприклад, якщо перемножуються дві матриці A і B , то їхні розміри повинні бути $N*M$ та $M*L$ відповідно, а результатом є матриця C з розмірами $N*L$ (! згадайте й запишіть вираз для добутку двох матриць).

Наведемо декілька фрагментів робочого документа, що ілюструють операції над матрицями:

— $A1 := 2*A$ (елементи матриці $A1$ дорівнюють подвоєним значенням елементів A);

— $B := A1 + A$ (елементи B дорівнюють сумі відповідних елементів матриць $A1, A$);

— $C := A * A1^T$ (Добуток матриці A розміром 3×2 ; результат матриці з розміром 3×3);

— $x2 := 3 * x$ (Обчислюється вектор x^2 як добуток матриці 3 розміром 3×3 на вектор x);

— $C := - 3$ (Зміна знака у всіх елементів матриці 3 на протилежний).

Зауважимо, що верхній індекс T означає транспонування матриці.

Векторні й матричні оператори наведені в Додатку 3.

Векторні оператори в якості операнда завжди використовують **вектор-стовпець**, а не вектор-рядок. Щоб змінити вектор-рядок на вектор-стовпець необхідно використати транспонування.

Завдання 4.1. На новому робочому документі задайте вектор, у який складається з t компонент (де t задається), причому елементи з парними

індексами(тобто індекси 0, 2, 4, ..) дорівнюють 1, а з непарними - 0. Потім, використовуючи арифметичні операції й векторні оператори, обчисліть:

— вектор v_2 , елементи якого дорівнюють $v_{2i} = y_i / 2$;

- скалярний добуток векторів v_2 й y ;

- довжини векторів v_2 й y ;

- довжину різниці двох векторів v_2, y

Завдання 4.2. У робочому документі сформууйте матрицю A розміром 3×3 виду

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}.$$

Потім обчисліть наступні масиви:

— вектор x_1 , дорівнює першому стовпцю матриці A (тобто 2, 6, 10);

— вектор x_2 , складений з елементів першого рядка(тобто 5, 6, 7);

— вектор $z = A * x_1$;

— зворотню матрицю $B = A^{-1}$;

— добуток матриць $A * Y$ й $B * A$ (чому теоретично рівні ці добутки?);

— матриці $C = A^3$; $D = A^{-3}$;

— добуток $C * D$ й $D * C$.

Векторні й матричні функції. Mathcad містить велику кількість вбудованих функцій для роботи з векторами й матрицями (див. Додаток 3). Для звернення до цих функцій досить у виразі записати ім'я функції, а потім у круглих дужках ім'я вектора або матриці, що є аргументом функції.

Результати виконання функції можна присвоїти вектору або матриці відповідно, використовуючи для цього оператор присвоювання.

Приклад 4.6. У робочому документі сформована матриця

$$C = \begin{pmatrix} 100 & 2 & 3 \\ 4 & 50 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

і обчислені наступні значення функцій

$$\text{norm1}(3) = 111$$

$$\text{cond1}(3) = 16.167$$

$$\text{norm2}(3) = 100.546$$

$$\text{cond2}(3) = 13.107$$

$$\text{norme}(3) = 112.956$$

$$\text{conde}(3) = 14.934$$

$$\text{normi}(3) = 105$$

$$\text{condi}(C) = 16.304$$

Обчислені числа обумовленості вказують на гарну обумовленість матриці C . Погано обумовлені матриці мають $\text{cond}(L) > 10^5$.

В цілому векторні й матричні оператори й функції системи MathCAD дозволяють вирішувати широке коло завдань лінійної алгебри

Завдання й хід роботи

1. Відкрити новий документ написати назву теми лабораторної роботи, групу й прізвище і виконати приклади (4.1 -4.6) і завдання 1,2 .

2. Відкрити заданий документ *mcad_Lab04.mcd*.

У меню **Вікна** (Window) задати **Вертикально**. У своєму документі (у правому вікні) продовжувати виконувати приклади і завдання за варіантом, читаючи вказівки в документі ліворуч

3. Показати результати викладачеві. Зберегти свій документ.

Лабораторна робота № 5. Побудова графіків, діаграм, рисунків

Основні відомості

MathCad дозволяє досить просто будувати один або декілька графіків у декартових або полярних системах координат, а також графіки поверхонь.

Побудова графіків функцій однієї змінної. При побудові графіка необхідно виконати наступні кроки:

- *клацнути мишею в тому місці, де потрібно створити графік;*
- *звернутися до пункту **Вставка - Графіки**, команди **X-Y координати**. У робочому документі створюється порожній графік із шістьма полями уведення;*
- *у поле 1 необхідно ввести ім'я дискретного аргумента або змінної з індексами, що відіграє роль аргументу;*
- *у поле 2 необхідно ввести змінну з індексом або вираз, що залежить від аргументу;*
- *інші чотири поля використовують для вибору границь по осях координат, їхнє завдання обговорюється пізніше;*
- *для рисування графіка необхідно клацнути мишею поза графіком або натиснути [F9], якщо автоматичний режим відключений.*

Після рисування графіка автоматично заповнюються поля 3, 4, 5, 6 (межі по осях: число або вираз для кожного «знако-місця» на кінцях осей) - див. Рис.5.1.

Приклад 5.1. У робочому документі побудуйте графік функції $f(x)=x^2+x$, для x , який змінюється від -10 до 10 із кроком 0.5. Для цього спочатку необхідно ввести наступні конструкції:

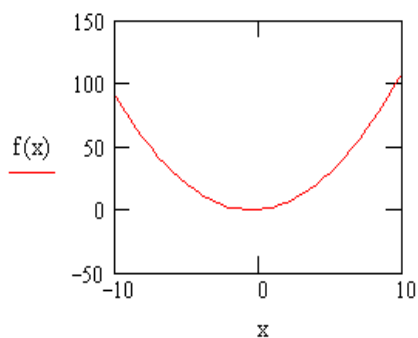
$$x := -10, -9.5..10 \quad f(x) := x^2 + x$$

і виконати зазначені вище дії. Одержимо графік:

Побудова декількох графіків на одному кресленні. Mathcad дозволяє накреслити кілька кривих на тому самому кресленні.

Щоб представити графічно кілька виразів по осі ординат (тобто декілька графіків), які залежать від одного виразу по осі абсцис (тобто від одного аргументу), необхідно:

- У поле 2 увести потрібні імена виразів (кожен вираз визначає один графік на рисунку), **відокремлюючи їх одне від одного комами**. При введенні коми з'являється нове порожнє поле, у якому вводиться чергове ім'я вираз. Причому поля розташовуються **одне під одним**.



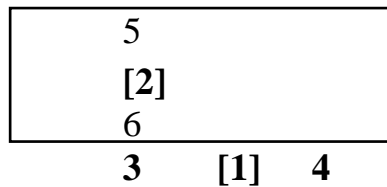


Рис. 5.2

- у поле 1 ввести ім'я вираз, що визначає аргумент (X).

На одному рисунку можна побудувати до 16 функцій, причому кожен графік на рисунку відображається різними кольорами й різним типом ліній.

Завдання 5.1. На одному полі побудувати графіки .

$$x_i = -4 \cdot \pi + \frac{\pi}{10} i \quad y_i = x_i \cdot \sin(x_i), \quad i=0, \dots, 80.$$

Для побудови декількох незалежних кривих на одному кресленні необхідно ввести два або більше виразів, відокремлених комами на осі ординат і таку ж кількість виразів (виконуючих роль аргументів) на осі абсцис, відокремлюючи їх також комами (поля цих виражень розташовуються поруч). При цьому є попарне узгодження - перший вираз на осі абсцис є аргументом для функції, обумовленої першим виразом на осі ординат і т.д.

Приклад 5.2 Вирішити графічно рівняння $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$.

Для побудови графіка функції $x^3 + 3x^2 - 2$ виконуємо наступні дії:

- Вводимо функцію, набравши вираз $x^3 + 3x^2 - 2$.
- У панелі Вставка – Графіки (або в меню математичних знаків) клацаємо на кнопці із зображенням плоского графіка X-Y і на екрані з'являється шаблон графіка із уже введеної по осі Y функцією.
- Вводимо в місце шаблону по осі X ім'я незалежного аргументу x .
- Клацаємо поза межами лівою кнопкою миші.

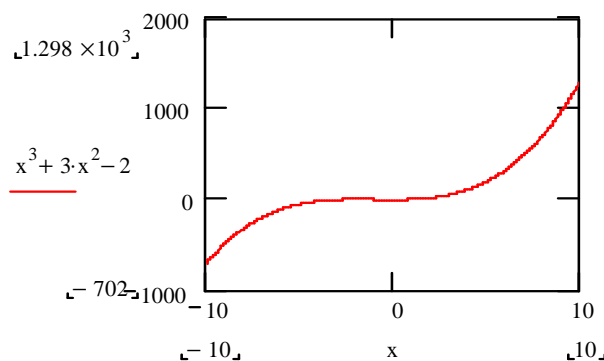


Рис.5.3

Редагування графіка. Для зміни формату осей, кольорів графіків необхідно:

- клацнути мишею на графіку, щоб він був обведений синьою рамкою;
- звернутися до пункту X-Y, команди **Формат - Графіки**
- використовуючи закладки **X-Y-осі, Графіки, напис, За замовчуванням** виконати необхідне редагування графіка.

Зміна розмірів графіка. Для цього необхідно:

- клацнути мишею поза графічною областю - це закріпить один кут рамки;
- натиснути ліву кнопку і, втримуючи її, укласти графік у рамку, і відпустити ліву кнопку;

- сполучити покажчик миші із правою або з нижньою границею так, щоб покажчик прийняв вид двонаправленої стрілки й перемістити границю в потрібне місце.

Для зміни положення покажчик миші помістити всередину рамки (з'явиться символ +) і перетягнути графік в потрібне місце робочого документа.

Графіки поверхонь

Щоб створити графік поверхні, необхідно:

- визначити матрицю значень, яку треба відобразити графічно;
- звернутися до пункту **Вставка - Графіки** ;
- на екрані з'явиться рамка з одним полем;
- надрукувати в цьому полі ім'я матриці;
- для креслення графіка клацніть поза графічною областю або натисніть [F9]

Приклад 5.3. Побудувати графік функції

$$f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$$

для $x \in [-1.5, 1.5]$, $y \in [-1.5, 1.5]$

Фрагмент наведений на рис. 5.4.:

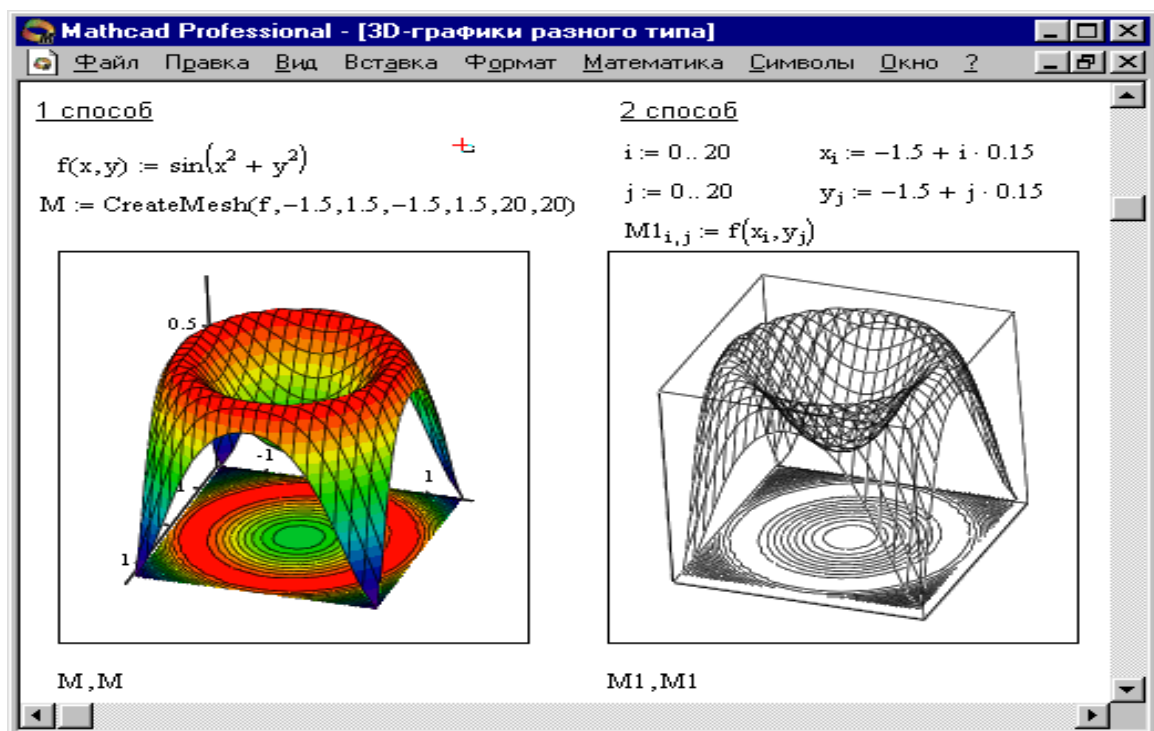


Рис. 5.4 – Приклад побудови на одному рисунку двох 3-D - графіків різного типу

На рис.5.4 побудована одна поверхня різними способами, з різним форматуванням, причому зображені поверхні й під ними - ті ж поверхні у вигляді контурного графіка.

Завдання і хід роботи

1. Відкрити новий документ написати назву теми лабораторної роботи, групу й Прізвище і виконати приклади (5.1 -5.2)
2. Відкрити заданий документ *mcad_Lab06.mcd*.

У меню **Вікна** (Window) задати **Вертикально**. У новому документі (у правому вікні) продовжувати виконувати приклади й обчислення, читаючи вказівки в документі ліворуч.

3. Виконати розрахунки для різних числових даних. Зберегти документ.

Лабораторна робота № 6. Вирішення рівнянь і систем рівнянь

Основні відомості

Знаходження нулів функції, вирішення рівнянь. Вбудована функція root.

Нулем функції однієї незалежної змінної називається таке значення її аргумента, при якому значення функції дорівнює нулю, тобто нуль функції $f(x)$ — це корінь рівняння $f(x)=0$.

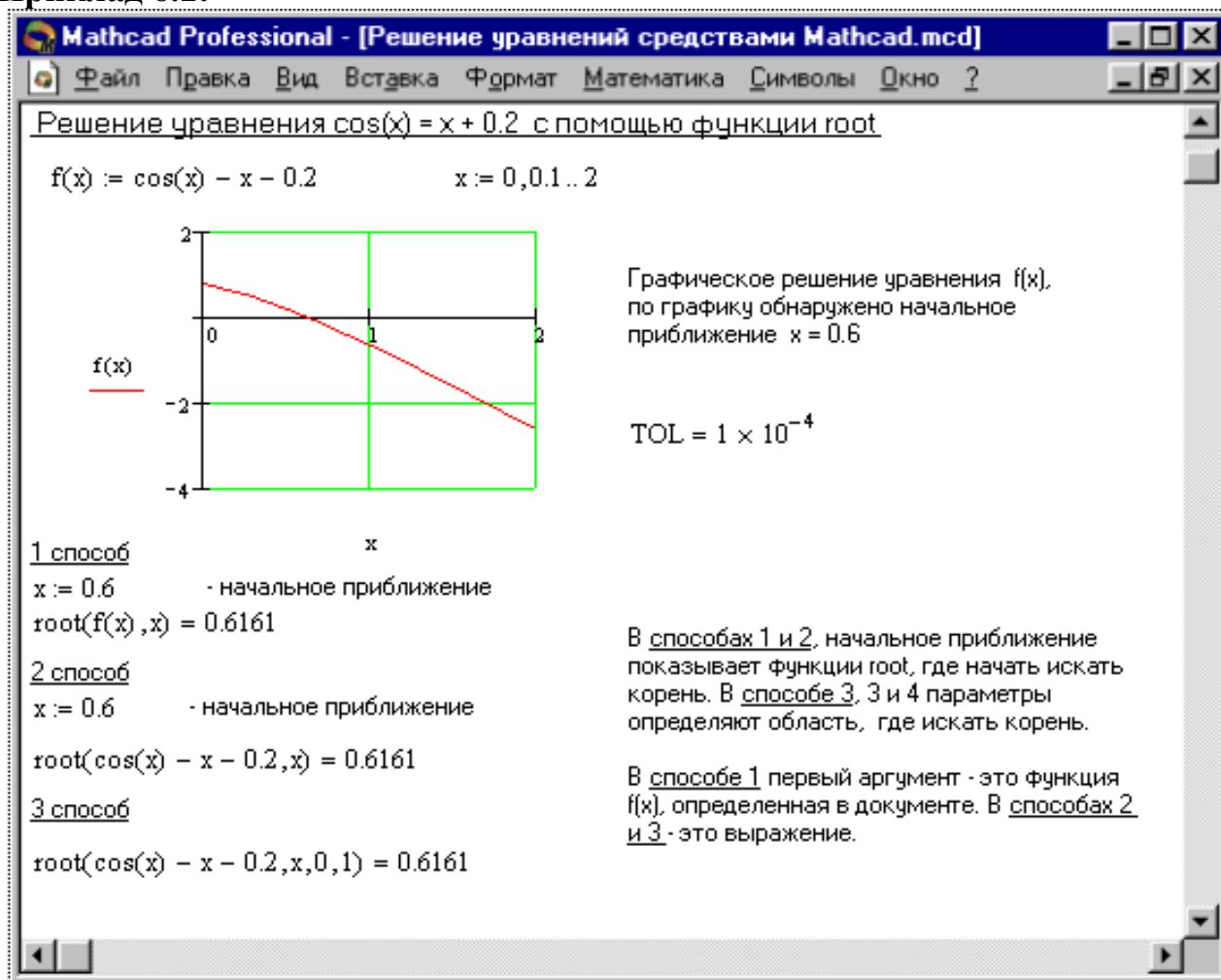
Для пошуку нулів функції, а також коренів рівняння застосовується вбудована **функція root**. Формат функції:

root (вираз, ім'я_змінної)

Щоб знайти нуль функції (або корінь рівняння):

- 1) задайте початкове передбачуване значення невідомого,
- 2) використайте функцію root для вирішення.

Приклад 6.1:



Знаходження коренів полінома

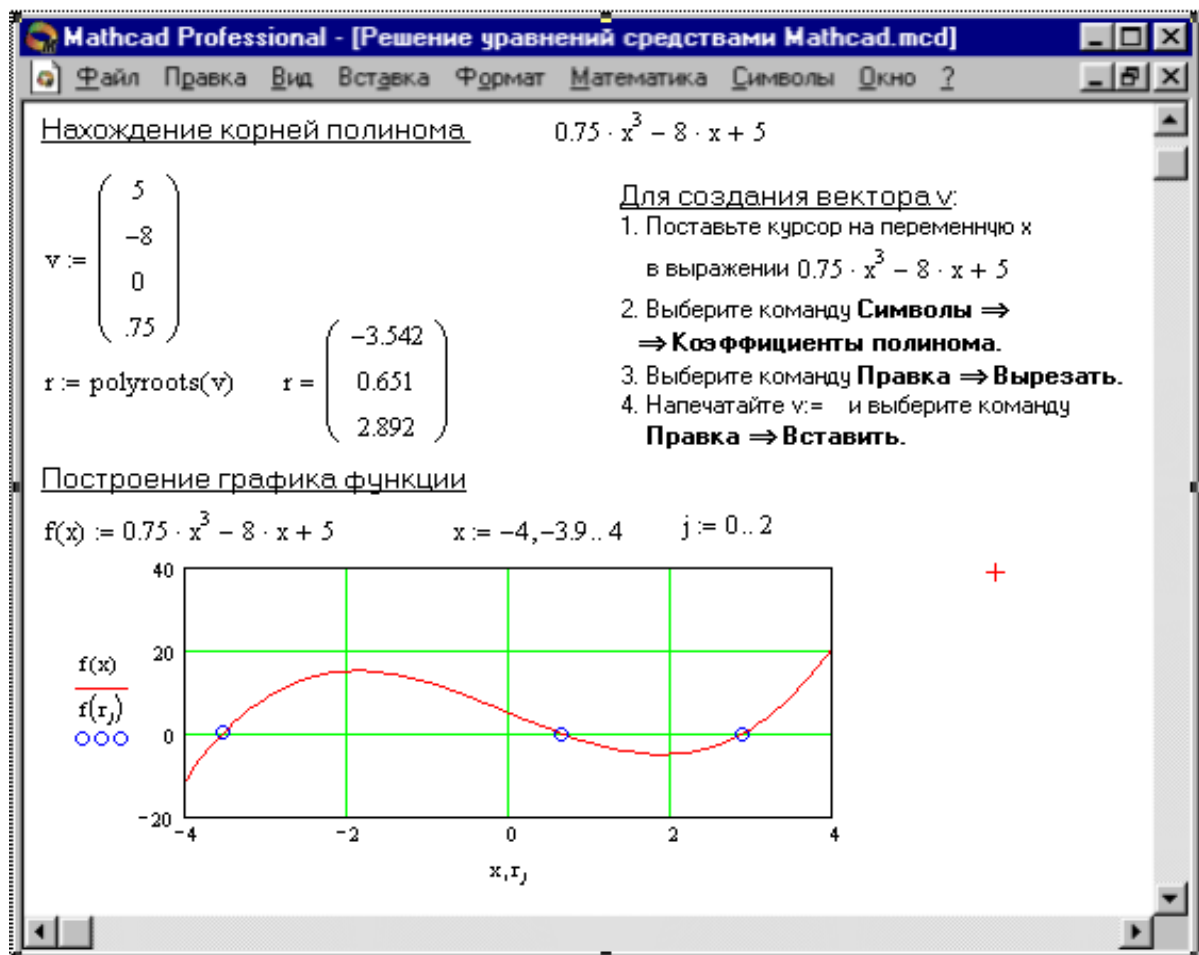


Рис. 6.2 – Визначення коренів полінома

Для знаходження коренів виразів, що має вигляд

$$v_n x^n + \dots + v_2 x^2 + v_1 x + v_0,$$

краще використати функцію **polyroots**, ніж **root**. На відміну від функції **root**, функція **polyroots** не вимагає початкового наближення і повертає відразу всі корені, як дійсні, так і комплексні.

Polyroots(v) - Повертає корінь полінома ступеня n . Коефіцієнти полінома перебувають у векторі v довжини $n + 1$. Повертає вектор довжини n , який містить корені полінома.

Аргументи: v – вектор, що містить коефіцієнти полінома. Вектор v зручно створювати використовуючи команду **Символи** \Rightarrow **Коефіцієнти полінома**.

Приклад 6.2 Рис.6.2 ілюструє знаходження коренів полінома засобами *Mathcad*.

Вирішення систем рівнянь. Функції Find й Minerr.

MathCAD дає можливість вирішувати також системи рівнянь. Максимальне число рівнянь і змінних дорівнює 50. Результатом вирішення системи буде чисельне значення шуканого кореня.

Для вирішення системи рівнянь необхідно виконати наступне:

- Задати початкове наближення для всіх невідомих, які входять у систему рівнянь. Mathcad вирішує систему за допомогою ітераційних методів.
- Надрукувати ключове слово **Given**. Воно вказує, що далі треба записати системи рівнянь.
- Введіть рівняння та нерівності в будь-якому порядку. Використайте [Ctrl]= для друку символу =. Між лівими й правими частинами нерівностей може стояти будь-який із символів <, >, (і (.
- Введіть будь-який вираз, що містить функцію **Find**, наприклад:
 $z := \text{Find}(x, y).$

Таким чином, обчислювальний блок *Given* має наступну структуру:

```

⟨ Начальные условия ⟩
Given
⟨ Равенство ⟩
⟨ Ограничения ⟩
⟨ Вызов функции Find или Minerr ⟩

```

Блоки вирішення рівнянь не можуть бути вкладені друг у друга, кожен блок може мати тільки одне ключове слово *Given* та ім'я функції *Find*.

Повідомлення про помилку

No solution was found. Try changing
the guess value or the value of TOL or CTOL.

(Рішення не знайдене) з'являється, коли:

- Подане завдання може не мати вирішення.
- Для рівняння, що не має дійсних рішень, як початкове наближення взяте дійсне число, й навпаки.
- У процесі пошуку рішення послідовність наближень потрапила в точку локального мінімуму нев'язання. Для пошуку рішення потрібно задати різні початкові наближення.
- Можливо, поставлене завдання не може бути вирішене із заданою точністю. Спробуйте збільшити значення **TOL**.

Приклад 6.3

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b,$$

$$x = A^{-1}b.$$

Системи лінійних рівнянь зручно вирішувати за допомогою функції ***lsolve(A, b)***

Аргументи:

A - квадратна матриця.

b - вектор, що має стільки ж рядків, скільки рядків у матриці ***A***.

Повертається вектор вирішення ***x*** такий, що ***Ax = b***.

Приклад 6.4. На рис.6.4 наведене вирішення системи трьох лінійних рівнянь щодо трьох невідомих.

Наближені рішення

Функція ***Minerr*** дуже схожа на функцію ***Find*** (використовує той же алгоритм). Якщо в результаті пошуку не може бути отримане подальше уточнення поточного наближення до рішення, ***Minerr*** повертає це наближення. (Функція ***Find*** у цьому випадку повертає повідомлення про помилку). Правила використання функції ***Minerr*** такі ж, як і функції ***Find***.

Minerr(z1, z2, . . .) Повертає наближене рішення системи рівнянь. Кількість аргументів повинне дорівнювати кількості невідомих.

Якщо ***Minerr*** використовується в блоці вирішення рівнянь, необхідно завжди включати додаткову перевірку вірогідності результатів.

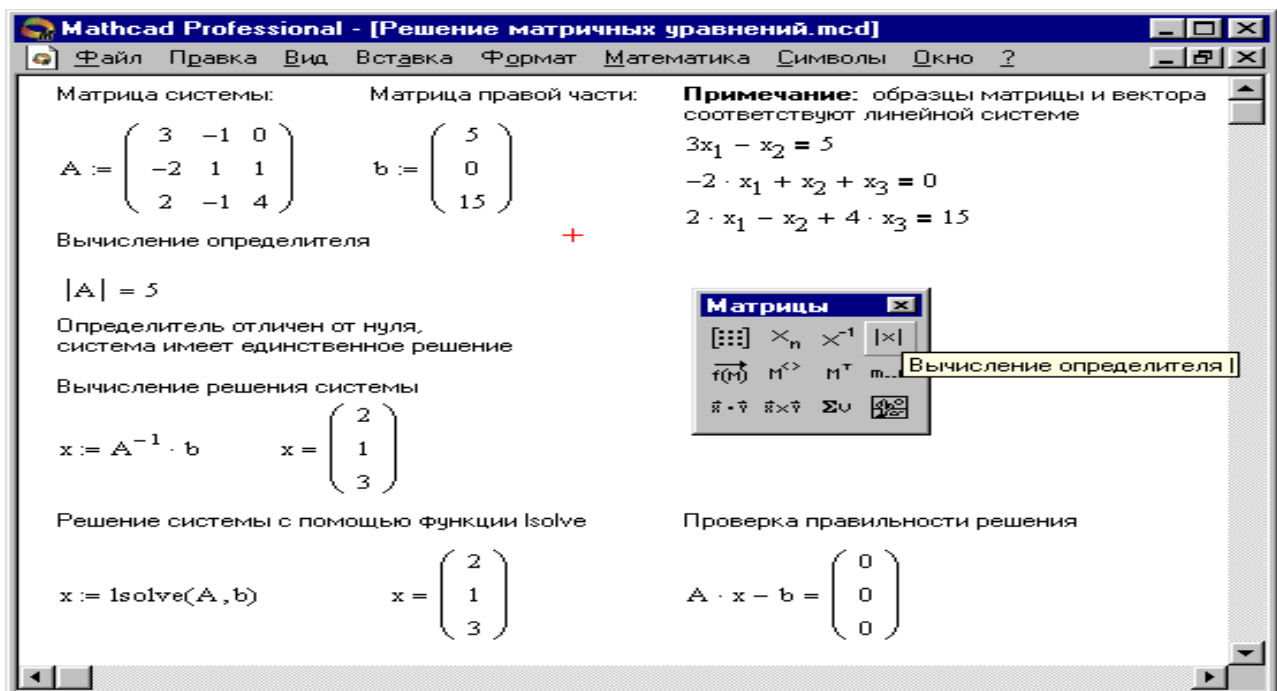


Рис. 6.4

Приклад 6.5. Використовуючи функцію *Minerr*, обчисліть вирішення системи рівнянь

$$\begin{aligned} x + y &= 0.95; \\ (x^2 + 1)^2 + (y^2 + 1)^2 &= 5.5. \end{aligned}$$

Фрагмент документа MathCAD показаний нижче:

$$x := 0 \quad y := 1$$

Given

$$(x^2 + 1)^2 + (y^2 + 1)^2 = 5.5$$

$$x + y = 0.95$$


$$z := \text{Minerr} (x, y)$$

$$z = \begin{pmatrix} -0.106 \\ 1.056 \end{pmatrix} \quad \text{Найденное решение}$$

$$z_0 + z_1 = 0.95$$

Проверка найденного решения

$$\left[(z_0)^2 + 1 \right]^2 + \left[(z_1)^2 + 1 \right]^2 = 5.5$$

 **Зуваження:** 1) Якщо рішення не може бути знайдене в межах встановленої точності (параметр TOL), тоді виводиться повідомлення **not converging.**

Спробуйте змінити значення параметра **TOL**.

2) Якщо при вирішенні блоку не може бути знайдене рішення для зазначених у тілі блоку конструкцій, то виводиться повідомлення: **did not found solution.**

У деяких випадках вдається одержати наближене вирішення завдання, змінивши функцію **Find** на **Minerr**.

3) У блоці не повинно бути умов менше, ніж число провідних змінних. Якщо буде потреба, блок можна поповнити фіктивними умовами.

4) Функція **Minerr** повертає значення змінних, які мінімізують значення вбудованої змінної **ERR**, яка дорівнює сумі квадратів відхилень по всіх умовах блоку.

У вирішальному блоці використовується модифікований варіант методу Ньютона вирішення систем рівнянь.

З а в д а н н я й х і д р о б о т и

1. Відкрити новий документ, написати назву теми лабораторної роботи, групу й Прізвище

2. Виконати наступні завдання .

Вправа 1. Побудувати графік функції $f(x)$ (таблиця 1) і приблизно визначити один з коренів рівняння. Вирішити рівняння $f(x) = 0$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ за допомогою вбудованої функції **root**;

Таблиця 1 Варіанти вправи 1

№ вар.	$f(x)$	№ вар.	$f(x)$
1	$e^{x-1} - x^3 - x$ $x \in [0, 1]$	9	$0.25x^3 + x - 2$ $x \in [0, 2]$
2	$x - \frac{1}{3 + \sin(3.6x)}$ $x \in [0, 1]$	10	$\arccos \frac{1-x}{1+x^2} - x$ $x \in [2, 3]$
3	$\arccos x - \sqrt{1-0.3x^3}$ $x \in [0, 1]$	11	$3x - 4 \ln x - 5$ $x \in [2, 4]$
4	$\sqrt{1-0.4x^2} - \arcsin x$ $x \in [0, 1]$	12	$e^x - e^{-x} - 2$ $x \in [0, 1]$
5	$3x - 14 + e^x - e^{-x}$ $x \in [1, 3]$	13	$\sqrt{1-x} - \operatorname{tg} x$ $x \in [0, 1]$
6	$\sqrt{2x^2 + 1.2 - \cos x} - 1$ $x \in [0, 1]$	14	$1 - x + \sin x - \ln(1+x)$ $x \in [0, 2]$
7	$\cos\left(\frac{2}{x}\right) - 2\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$ $x \in [1, 2]$	15	$x^5 - x - 0.2$ $x \in [1, 2]$
8	$0.1x^2 - x \ln x$ $x \in [1, 2]$		

Вправа 2. Для полінома $g(x)$ (таблиця 2) виконати наступні дії:

- 1) вирішити рівняння $g(x) = 0$ за допомогою функції *polyroots*;

Таблиця 2 Варіанти вправи 2

№ вар	$g(x)$	№ вар	$g(x)$
1	$x^4 - 2x^3 + x^2 - 12x + 20$	9	$x^4 + x^3 - 17x^2 - 45x - 100$
2	$x^4 + 6x^3 + x^2 - 4x - 60$	10	$x^4 - 5x^3 + x^2 - 15x + 50$
3	$x^4 - 14x^2 - 40x - 75$	11	$x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 20x + 25$
4	$x^4 - x^3 + x^2 - 11x + 10$	12	$x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x - 20$
5	$x^4 - x^3 - 29x^2 - 71x - 140$	13	$x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 5x + 100$
6	$x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 13x - 30$	14	$x^4 + 10x^3 + 36x^2 + 70x + 75$
7	$x^4 + 3x^3 - 23x^2 - 55x - 150$	15	$x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 59x + 60$
8	$x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 10x + 75$		

Вправа 3. Вирішити систему лінійних рівнянь (табл. 3):

- 1) використовуючи функцію *Find*;
- 2) матричним способом і
- 3) використовуючи функцію *Isolve*.

Таблиця 3 Варіанти вправи 3

№ вар	Система лінійних Рівнянь	№ вар	Система лінійних рівнянь
1	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$	9	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = -7 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -2 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 22 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -7 \end{cases}$	10	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 26 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 34 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 26 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 9x_1 + 10x_2 - 7x_3 - x_4 = 23 \\ 7x_1 - x_3 - 5x_4 = 37 \\ 5x_1 - 2x_3 + x_4 = 22 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$	11	$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -18 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 28 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 11x_2 + x_3 + 2x_4 = 21 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = 158 \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 128 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 - 12x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 66 \\ 2x_2 - 6x_3 + x_4 = -63 \\ 8x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 146 \\ 2x_1 - 7x_2 + 6x_3 - x_4 = 80 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 88 \\ 5x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 88 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 181 \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 99 \end{cases}$	13	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = -16 \\ 2x_1 - x_2 + 13x_3 + 4x_4 = 213 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 72 \\ x_1 - 12x_3 - 5x_4 = -159 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 8x_4 = -7 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -8 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 7 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 60 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 27 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 15 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 18 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 37 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 30 \end{cases}$	15	$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 5x_3 + x_4 = 124 \\ 7x_2 - 5x_3 - x_4 = -54 \\ 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 83 \\ 3x_1 - 9x_2 + x_3 + 6x_4 = 45 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 165 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ 9x_1 + 4x_3 - x_4 = 194 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -19 \end{cases}$		

- 4) Показати результати викладачеві. Зберегти документ.

Лабораторна робота № 7. Вирішення оптимізаційних завдань

Основні відомості

У деяких завданнях проектування існує необхідність встановити значення параметрів, які доставляють максимум або мінімум деякому функціоналові (або цільової функції), що залежить від цих параметрів. Якщо на значення цих параметрів не накладені будь-які обмеження (наприклад, вимога позитивності), то маємо завдання *безумовної оптимізації* (або *оптимізації без обмежень*). Якщо задані обмеження, що визначають *припустимі значення* параметрів, то маємо завдання *умовної оптимізації* (*оптимізації з обмеженнями*). Друге завдання відрізняється від першого тим, що рішення шукається тільки *серед припустимих значень* або, інакше, на *припустимій безлічі* параметрів.

7.1. Вирішення оптимізаційних завдань без обмежень

Для цього використовуються дві функції MathCAD:

- **Maximize**(f , <список параметрів>) – обчислення точки максимуму;
- **Minimize**(f , <список параметрів>) – обчислення точки мінімуму, де f – ім'я функціонала, який мінімізується, визначеного до звертання до функції; <список параметрів> – містить перерахування (через кому) імен параметрів, щодо яких вирішується оптимізаційне завдання.

Увага! Перед звертанням до функцій *Maximize*, *Minimize* (імена яких починаються прописними буквами) обов'язково задати початкове значення параметрів оптимізації.

Приклад 7.1. Дано функціонал:

$$g(x, y, z) = 10\sqrt{x^2 - 2x + 36 + y^2 + 4y + 3z^2 - 18z}.$$

Знайти значення x , y , z , при яких $g(x, y, z)$ досягає мінімального значення.

Документ MathCAD, який вирішує це завдання:

$$g(x, y, z) := 10 \cdot \sqrt{x^2 - 2 \cdot x + 36 + y^2 + 4 \cdot y + 3 \cdot z^2 - 18 \cdot z}$$

$$x := 1 \quad y := 1 \quad z := 1 \quad \text{Задание точки "старта"}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \text{Minimize}(g, x, y, z) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad g(x, y, z) = 20$$

7.2. Вирішення оптимізаційних завдань з обмеженнями

Використовуються ті ж функції *Maximize*, *Minimize*, але вони входять в блок рішення **Given** і перед ними розміщуються обмеження у вигляді рівностей або нерівностей, що визначають припустиму область значень параметрів оптимізації.

Приклад 7.2. Задано функціонал:

$$F(a, b) = 100(a - b)^2 - 50 \frac{a}{b} \tag{7.2. 1}$$

і обмеження у вигляді

$$a + 2b \leq 5; \quad b \geq 1; \quad a \geq 0. \tag{7.2. 2}$$

Визначити значення a, b , що дають максимальне значення функціонала (7.2. 1) і задовольняють нерівностям (7.2. 2).

Документ MathCAD, що вирішує це завдання, показаний на рис. 7.2. Точка «старту» алгоритму береться із припустимої області, обумовленої обмеженнями .

$$\begin{aligned}
 F(a, b) &:= 100 \cdot (a - b)^2 - 50 \cdot \frac{a}{b} \\
 a &:= 1 \quad b := 1 \\
 \text{Given} \\
 a + 2 \cdot b &\leq 5 \quad b \geq 1 \quad a \geq 0 \\
 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &:= \text{Maximize}(F, a, b) \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \end{pmatrix} \quad F(a, b) = 625 \\
 a + 2 \cdot b &= 5 \quad \text{Проверка ограничений} \\
 b &= 2.5
 \end{aligned}$$

Рис. 7.2 – Умовна максимізація

Зауваження . У завданнях оптимізації з обмеженнями рішення доцільно визначати з необхідних умов екстремуму. Ці умови породжують систему рівнянь (найчастіше нелінійних), які розташовуються в блоці **Given**, разом з обмеженнями, що визначають припустиму область. Саме рішення шукається за допомогою функцій *Find*, *Minerr* .

Приклад 7.3.:

$$f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2 .$$

Потрібно обчислити точку мінімуму функціоналу при обмеженнях:

$$x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad y \leq 9 - x .$$

Документ MathCAD вирішення цього завдання: .

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &:= 100 \cdot (y - x^2)^2 + (1 - x)^2 \\
 x &:= 2 \quad y := 3 \\
 \text{Given} \\
 \frac{d}{dx} f(x, y) &= 0 \quad \frac{d}{dy} f(x, y) = 0 \quad \text{Условия минимума} \\
 x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad y &\leq 9 - x \quad \text{Ограничения} \\
 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &:= \text{Minerr}(x, y) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 f(x, y) &= 3.538 \times 10^{-8}
 \end{aligned}$$

Приклад 7.4 (завдання лінійного програмування). Цех рисого підприємства повинен виготовити 100 виробів трьох типів (x_1, x_2, x_3) і не менш ніж 20 штук виробів кожного типу. На вироби йде 4, 3.4 та 2 кг металу відповідно, при його загальному запасі 340 кг, а також витрачаються по 4.75, 11 і 2 кг пластмаси, при її загальному запасі 400 кг. Прибуток, отриманий від кожного виробу, дорівнює 4, 3 й 2 грн. Визначити, скільки виробів кожного типу необхідно випустити для одержання максимального прибутку в рамках установлених запасів металу й пластмаси.

Документ MathCad, що вирішує це завдання.

$$f(x_1, x_2, x_3) := 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3$$

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 1 \quad x_3 := 1$$

Given

$$x_1 \geq 20 \quad x_2 \geq 20 \quad x_3 \geq 20$$

$$4 \cdot x_1 + 3.4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 340$$

$$4.75 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 700$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \text{Maximize} \left(f, x_1, x_2, x_3 \right) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$4 \cdot x_1 + 3.4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 340$$

$$4.75 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 534 \quad \text{Проверка Ограничений}$$

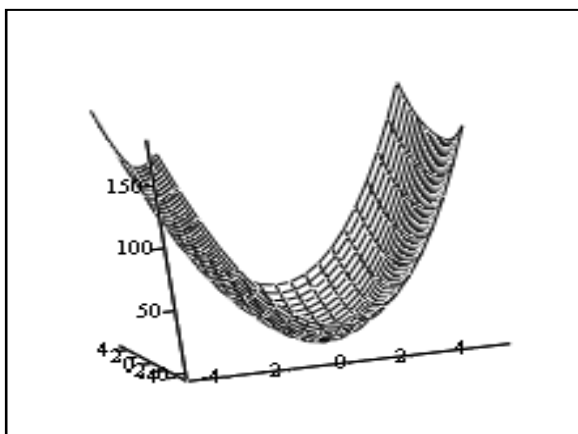
$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

Приклад 7.5 Фрагмент вирішення завдання оптимізації функції.

Задание функции 2-х переменных:

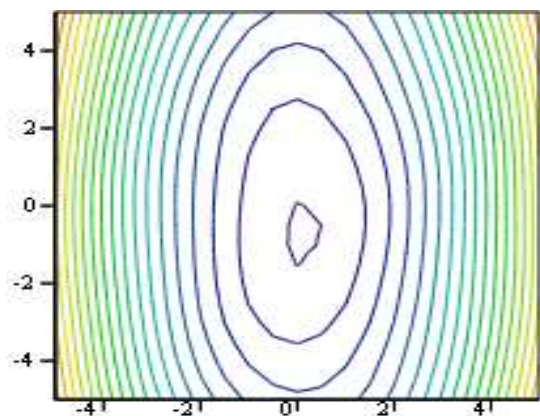
$$f(x, y) := 6 \cdot (x - 0.3)^2 + (y + 0.4)^2 + 3 \cdot (x - 0.3) + \sin(y - x)$$

График функции



f

Поверхности уровня функции



f

Задание начального приближения для поиска минимума функции 2-х переменных

$$x := 0 \quad y := 0$$

Точность для блока Given Minimize

$$TOL := 10^{-6}$$

Нахождение точки минимума функции 2-х переменных с помощью встроенного ϵ Given Minimize

Given

$$P := \text{Minimize}(f, x, y)$$

Полученное приближенное решение

$$P = \begin{pmatrix} 0.10565 \\ -0.733899 \end{pmatrix}$$

3. ЗАДАНИЯ:

1. Завдання 9.1 (в. 1-30). Знайти мінімум і максимум на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$ з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$.

2. Завдання 9.5. (в. 1-30) Знайти мінімум функції 2-х змінних $f(x, y)$ з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$ на прямокутнику $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$.

ПОРЯДОК РІШЕННЯ ЗАВДАННЯ:

1. Задати зазначену у варіанті функцію $f(x, y)$.
2. Побудувати графіки функції й поверхонь рівня $f(x, y)$.
3. За графіками знайти точки початкового наближення до точок екстремуму.
4. Використовуючи вбудований блок **Given Maximize** й **Given Minimize**, знайти екстремуми функції із заданою точністю (див. табл. 9.5).

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

Таблиця до завдання 9.1

№	$f(x)$	a	b	№	$f(x)$	a	b
9.1. 1	$x^2 + 2e^x$	-2	2	9.1.16	$3\cos^2 x - \sqrt{x}$	0	3
9.1. 2	$e^x \sin x$	0	4	9.1.17	$4\sqrt{x} - \operatorname{tg} x$	0	1.5
9.1. 3	$2x + e^{4-x}$	1	7	9.1.18	$\sin^3 x + \cos^2 x$	0	1.5
9.1. 4	$e^x - 2\sin x$	0	2	9.1.19	$x^2 \cos x$	0	2
9.1. 5	$x^2 - 2^x$	0	2	9.1.20	$4^x - 8x$	0	2
9.1. 6	$2^x - \ln x$	0.1	3	9.1.21	$x^5 - 5^x$	0.5	1.5
9.1. 7	$x^3 - e^x$	0	3	9.1.22	$\ln(x) - 5\sin(x)$	1	2
9.1. 8	$\sin x - 2\cos x$	1	4	9.1.23	$x^3 - e^x$	-1	0
9.1. 9	$x^2 - 2\sin x$	0	3	9.1.24	$\sin x + e^{-x^2}$	-1	2
9.1.10	$e^x \cos x$	0	1.5	9.1.25	$\sin^2 x - \sqrt{x}$	0	1
9.1.11	$-3x + e^{x-1}$	0	4	9.1.26	$2^x \cos x$	-2	2
9.1.12	$x^3 - 3^x$	2	3.5	9.1.27	$e^{x-4} - 4x$	3	8

9.1.13	$e^x - \ln x$	0.1	2	9.1.28	$\ln(x) - 4^x$	0.1	1
9.1.14	$3\cos x - \sin x$	0	5	9.1.29	$2\sin x - 3\cos x$	-1	1
9.1.15	$x^4 - e^x$	0	2	9.1.30	$x^6 - e^x$	0	1

Таблиця до завдання 9.5

№	$f(x,y)$	x_1	x_2	y_1	y_2
9.5. 1	$x^2 + 2y^2 - 4x - 4\sin y$	-2	3	-2	4
9.5. 2	$x^4 + 3y^2 + \sin y \cdot e^{-x}$	-1	1	-0.5	0.5
9.5. 3	$x^2 + 2y^2 + 4\sin x \cos(y-1)$	-2	0	0	2
9.5. 4	$x^2 + 2y^2 + \sin x - \cos(y+5)$	-2	2	-2	2
9.5. 5	$x^2 + y^2 + xe^{\sin y}$	-2	0	0	2
9.5. 6	$4x^2 + y^2 + 3\sin x - \cos(y+1)$	-2	0	-1	1
9.5. 7	$3x^2 + y^2 + \ln(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 3)$	-2	2	-2	2
9.5. 8	$x^2 + 2y^2 + e^x \cos(y-1)$	-2	1	-1	1
9.5. 9	$x^2 + 3y^2 - 7\sin x - y$	-2	4	-4	4
9.5.10	$x^2 + y^2 + x + e^{-y}$	-2	1	-2	1
9.5.11	$x^2 + 3y^2 + ye^{\sin x}$	-1	1	-2	1
9.5.12	$x^2 + 4y^2 - 3\sin(x^2 + e^{-y})$	0	2	-2	2
9.5.13	$2x^2 + y^2 - \cos(x-1+y)$	0	2	-2	2
9.5.14	$3x^2 + 2y^4 + y\cos(e^{2x})$	-1	1	-1	1
9.5.15	$2x^2 + y^2 + \cos(x+y-2)$	-2	2	-2	2
9.5.16	$x^2 + 2y^2 - 4\sin x - \sin y$	-2	4	-2	4
9.5.17	$2x^2 + y^4 + x\cos(e^y)$	-1	1	-1	1
9.5.18	$6x^2 + y^2 + 3x + \sin(x+y)$	-2	2	-2	2
9.5.19	$x^4 + 3y^2 - 2xy - \sin x$	-2	2	-2	2
9.5.20	$x^4 + 3y^2 + y + e^{-x}$	-1	1	-1	1
9.5.21	$x^2 + 3y^2 + \sin(x-y+3)$	-2	2	-2	2
9.5.22	$x^2 + 2y^2 - 3\sin x - xy$	-2	2	-2	2
9.5.23	$2x^2 + y^2 + (x+y)e^{\cos x}$	-2	0	-2	0
9.5.24	$5x^2 + y^2 + 3x\cos(2y-x)$	-1	1	-1	1
9.5.25	$2x^2 + y^2 - 3x + e^{-y}$	0	2	0	2
9.5.26	$x^2 + 2y^2 - 7\sin x + \cos(x+2)$	1	3	0	2
9.5.27	$x^2 + 3y^2 - 5\sin x + xy$	-2	2	-2	2

9.5.28	$x^2 + 3y^2 + \cos(x + y - 5)$	-2	2	-2	2
9.5.29	$5x^2 + y^2 + e^{x+1} \sin y$	-2	2	-2	2
9.5.30	$5x^2 + 2y^2 + ye^{\sin 3x}$	-1	1	-1	1

Лабораторна робота № 8. Вирішення розрахункових завдань будівництва

ЗАВДАННЯ. 8.1 Для сталевго стрижня, зображеного на рис. 1.1, визначити у всіх поперечних перерізах напругу. Визначити також вертикальні переміщення для всіх поперечних перерізів стрижня.

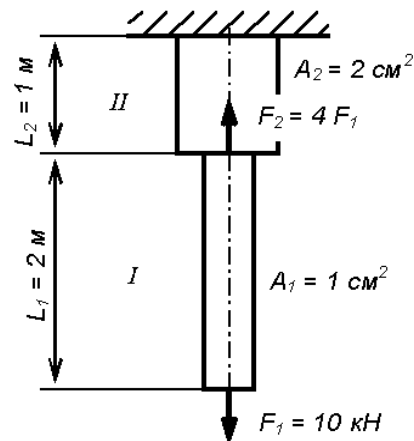


Рисунок до завдання 8.1

Дано:

$\text{kN} := 10^3 \cdot \text{N}$	$\text{MPa} := 10^6 \cdot \text{Pa}$	ORIGIN $\equiv 1$
$n := 2$	число участков	
$i := 1..n$		
$H_1 := 10 \cdot \text{mm}$	высота прямоугольного сечения участка	
$H_2 := 20 \cdot \text{mm}$	высота прямоугольного сечения участка	
$B_1 := 10 \cdot \text{mm}$	ширина прямоугольного сечения участка	
$B_2 := 10 \cdot \text{mm}$	ширина прямоугольного сечения участка	
$L_1 := 2 \cdot \text{m}$	длина участка 1	
$L_2 := 1 \cdot \text{m}$	длина участка 2	
$E_1 := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{MPa}$	модуль Юнга материала участка 1	
$E_2 := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{MPa}$	модуль Юнга материала участка 2	
$F_1 := 10 \cdot \text{kN}$	приложенная сила на участке 1	
$F_2 := -40 \cdot \text{kN}$	приложенная сила на участке 2	

Решение:

$$A := \overrightarrow{(B \cdot H)}$$

площадь сечения

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{cm}^2$$

$$F = \begin{pmatrix} 10 \\ -40 \end{pmatrix} \text{kN}$$

сила

$$\sigma_i := \frac{\sum_{i=1}^i F_i}{A_i}$$

напряжение

$$\sigma = \begin{pmatrix} 100 \\ -150 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

$$\delta_i := \sum_{i=1}^{n+1-i} \left(\frac{\sigma_{n+1-i} \cdot L_{n+1-i}}{E_{n+1-i}} \right)$$

перемещение

$$\delta = \begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.75 \end{pmatrix} \text{mm}$$

Проверка расчета перемещений по участкам

$$\frac{\sigma_2 \cdot L_2}{E_2} = -0.75 \text{ mm}$$

перемещение для 2 участка

$$\frac{\sigma_1 \cdot L_1}{E_1} + \frac{\sigma_2 \cdot L_2}{E_2} = 0.25 \text{ mm}$$

перемещение для 1 участка

ЗАВДАННЯ. 8.2 Однорідна гладка балка АВ силою ваги $P = 2 \text{ кН}$, закріплена в точці А за допомогою шарніра, спирається в точці С на стінку; у точці В підвішений вантаж $Q = 1 \text{ кН}$ (рис. 2.1). Визначити опорні реакції в точках А і С, якщо балка становить із обрієм кут $\alpha = 30^\circ$, $h = 1 \text{ м}$, $L = 3 \text{ м}$. Силова схема з реакціями зв'язків - див. рис. 2.2.

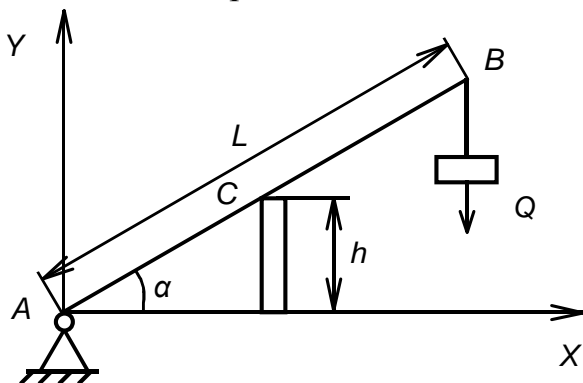


Рис. 2.1 до завдання 8.2

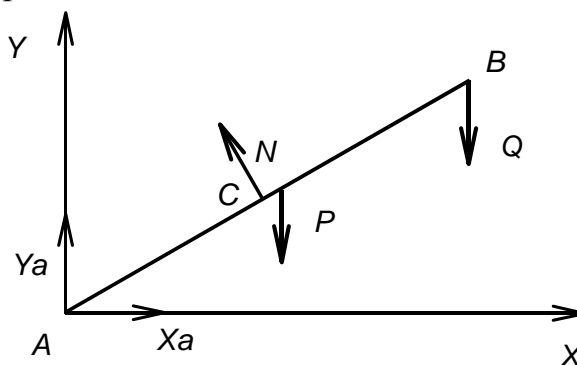


Рис. 2.2 до завдання 8.2

Дано:

$$\text{kN} := 10^3 \cdot \text{N}$$

$$P := 2 \cdot \text{kN} \quad Q := 1 \cdot \text{kN} \quad L := 3 \cdot \text{m} \quad h := 1 \cdot \text{m}$$

$$N := Q \quad X_A := P \quad Y_A := P$$

Решение:

2.3.1. Решение задачи с помощью функции "Find"

Given

$$X_A - N \cdot \cos(60 \cdot \text{deg}) = 0$$

$$Y_A - P + N \cdot \cos(30 \cdot \text{deg}) - Q = 0$$

$$-P \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos(30 \cdot \text{deg}) + \frac{N \cdot h}{\sin(30 \cdot \text{deg})} - Q \cdot L \cdot \cos(30 \cdot \text{deg}) = 0$$

$$\text{Find}(X_A, Y_A, N) = \begin{pmatrix} 1.299 \\ 0.75 \\ 2.598 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

2.3.3. Матричное решение задачи

Дано:

$$P := 2 \quad Q := 1 \quad L := 3 \quad h := 1$$

$$N := Q \quad XA := P \quad YA := P$$

Решение:

$$XA - N \cdot \cos(60 \cdot \text{deg}) = 0$$

$$YA - P + N \cdot \cos(30 \cdot \text{deg}) - Q = 0$$

$$-P \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos(30 \cdot \text{deg}) + \frac{N \cdot h}{\sin(30 \cdot \text{deg})} - Q \cdot L \cdot \cos(30 \cdot \text{deg}) = 0$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\cos(60 \cdot \text{deg}) \\ 0 & 1 & \cos(30 \cdot \text{deg}) \\ 0 & 0 & \frac{h}{\sin(30 \cdot \text{deg})} \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} 0 \\ Q + P \\ P \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos(30 \cdot \text{deg}) + Q \cdot L \cdot \cos(30 \cdot \text{deg}) \end{pmatrix}$$

$$X := A^{-1} \cdot D$$

$$X = \begin{pmatrix} 1.299 \\ 0.75 \\ 2.598 \end{pmatrix}$$

$$X := \text{lsolve}(A, D)$$

$$X = \begin{pmatrix} 1.299 \\ 0.75 \\ 2.598 \end{pmatrix}$$

ЗАВДАННЯ 8.3. Виконати розрахунок сил, що діють у вузлах елемента(рис.3.1)

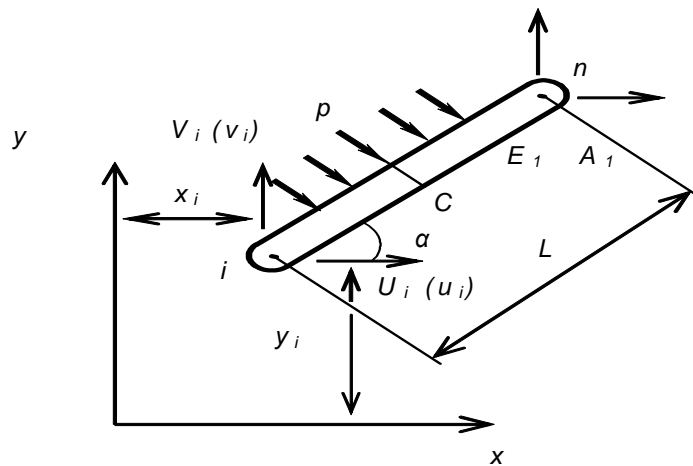


Рис. 3.1 – Шарнірно оперта балка С

p – розподілене поперечне навантаження, E_1 – модуль пружності балки, A_1 – постійний перетин балки, L – довжина балки, x_i , y_i – координати вузлових точок балки, u_i , v_i – переміщення вузлових точок балки, U_i , V_i – переміщення балки, i , n – вузлові точки балки.

Інженерні конструкції можна розглядати як деяку сукупність конструктивних елементів, з'єднаних у кінцевому числі вузлових точок. Якщо

відомі співвідношення між силами й переміщеннями для кожного окремого елемента, то можна описати властивості й досліджувати поведінку конструкції в цілому. Як приклад розглянемо двовимірне завдання про шарнірно обпертій С балці постійного перетину А з модулем пружності Е (рис. 3.1). Балка навантажена рівномірно розподіленим поперечним навантаженням р і підлягає однорідній температурній деформації.

Дано:

$L := 1000 \cdot \text{mm}$	длина балки
$d := 20 \cdot \text{mm}$	половина высоты сечения балки
$h := 40 \cdot \text{mm}$	ширина балки
$\alpha := 45 \cdot \text{deg}$	угол наклона балки
$E := 2.1 \cdot 10^5 \cdot \text{MPa}$	модуль упругости материала балки
$a := 1.1 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{\text{K}}$	коэффициент линейного расширения материала балки
$T := 30 \cdot \text{K}$	изменение температуры
$p := 10 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}}$	равномерно распределенная поперечная нагрузка
$\delta := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \cdot \text{mm}$	перемещения узловых точек элемента

Решение:

$A := 2 \cdot d \cdot h$	расчет площади сечения балки
$F_p := \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \frac{p \cdot L}{2}$	расчет сил, уравнивающих действующие на элемент распределенные нагрузки
$F_{\epsilon 0} := \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \cdot E \cdot a \cdot T \cdot A$	расчет сил, обусловленных начальными деформациями

Расчет матрицы жесткости элемента:

$$k := \begin{pmatrix} \cos(\alpha)^2 & \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) & -\cos(\alpha)^2 & -\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) & \sin(\alpha)^2 & -\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)^2 \\ -\cos(\alpha)^2 & -\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) & \cos(\alpha)^2 & \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)^2 & \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) & \sin(\alpha)^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{E \cdot A}{L}$$

$F \delta := k \cdot \delta$	расчет сил, вызванных перемещениями узлов
$F := F \delta + F_p + F_{\epsilon 0}$	расчет сил, действующих в узлах элемента
$F = \begin{pmatrix} 86.06 \\ 93.132 \\ -93.132 \\ -86.06 \end{pmatrix} \text{ kN}$	

Завдання 8.4. Розрахунок статично визначених ферм.

1. Матричний алгоритм для розрахунку ферм [5].

В елементах ферми діє тільки поздовжня сила N_e , постійна за довжиною кожного стрижня $N_e = N_{en} = N_{ek}$ (рис. 4.1, а).

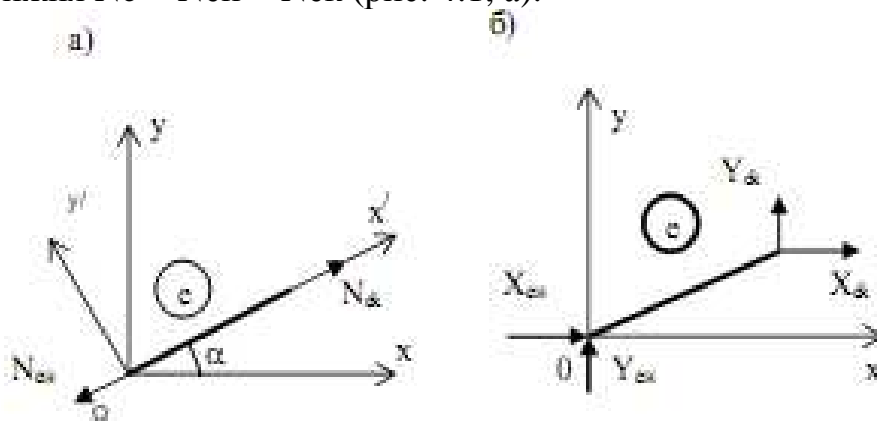


Рис. 4.1

Установимо зв'язок між зусиллями, що діють на кінці стрижня e ферми, у місцевої X' про Y' (рис. 1,а) і загальної X_0 (рис. 1,б) системах координат:

$$\begin{aligned} X_{en} &= -N_e \cos(\alpha) & X_{ek} &= N_e \cos(\alpha) \\ Y_{en} &= -N_e \sin(\alpha) & Y_{ek} &= N_e \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Тут індекси «н» та «до» належать відповідно до початку та кінця стрижня.

У матричному запису ці співвідношення мають вигляд

$$X_{en} = -F N_e \quad X_{ek} = F N_e \quad (1)$$

Встановимо тепер зв'язок зусиль в j -м вузлі ферми, де сходяться n_j стрижнів.

Нехай $P_j = [P_{xj} \ P_{yj}]$ - вектор зовнішнього навантаження, прикладений до вузла j , а $X_e = [X_{en} \ Y_{en}]$ - вектор зусиль на кінці стрижня e , що примикає до розглянутого вузла. Тоді умова рівноваги вузла j записується у вигляді:

$$P_j = \sum X_e, \quad \text{де, } e=1, n_j \quad (2)$$

Далі перейдемо до складання рівнянь рівноваги для всієї системи в цілому. Позначимо через $Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_e, \dots, Y_c]$ вектор внутрішніх зусиль у стрижнях ферми. Компоненти цього вектора виражаються через вектори зусиль для кінцевих перетинів кожного стрижня у вигляді рівностей

$$Y_e = X_{en} = -X_{ek}$$

Зв'язок між вектором зовнішніх навантажень $P = [P_1, P_2, \dots, P_e, \dots, P_c]$ і вектором Y , являє собою об'єднане в одне матричне співвідношення рівняння рівноваги (2) всіх вузлів ферми за допомогою структурної матриці S_c :

$$P = S_c Y$$

З огляду на формули (1), це співвідношення можна записати у вигляді

$$P = -S_0 N \quad (3)$$

де $N = [N_1, N_2, \dots, N_e, \dots, N_c]$ - вектор зусиль у стрижнях ферми.

Матриця S_0 виходить зі структурної матриці S_c заміною елементів «1» на вектори F_f , елементів «-1» на вектори $-F_f$, а елементів «0» - на нульові вектори $[0, 0]$.

Далі з вектора P необхідно виключити елементи, що відповідають опорним зв'язкам й одержати вектор Q , а з матриці S_0 виключити відповідні рядки, формуючи матрицю S_p . Тоді вектор невідомих зусиль N визначиться як вирішення матричного рівняння

$$S_p N = -Q \quad (4)$$

Умови можливості розв'язання цього рівняння призводять до наступних висновків:

1. По-перше, матриця S_p повинна бути квадратною, тобто різниця між числами її рядків і стовпців повинна дорівнювати нулю

Це рівняння відомо як умова статичної визначності ферми, тут S_{op} – число опорних стрижнів;

2. По-друге, визначник матриці S_p повинен бути відмінний від нуля, що є умовою геометричної незмінюваності ферми.

2. Приклад розрахунку статично визначеної ферми в середовищі Mathcad[]

Проведемо розрахунок ферми, зображеної на рис.4.2

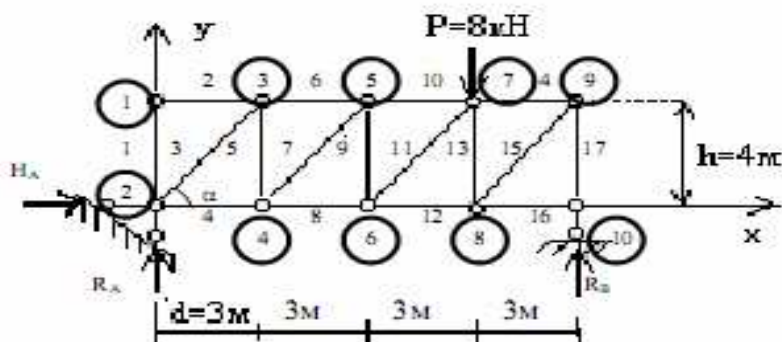


Рис. 4.2

ORIGIN := 1

nuz - число вузлів ферми; nel - число стрижнів (елементів) ферми.

nuz := 10 nel := 17

Перенумеруємо вузли й стрижні ферми (див. рис.2), запишемо структурну матрицю S_c (поєднуючи S_{c1} й S_{c2}) і задамо координати вузлів у векторі C .

$$S_{c1} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{c2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Sc := \text{augment}(Sc1, Sc2)$$

$$Sc =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	-1	-1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	-1	-1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	-1	-1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	1	1	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	1	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	1	1	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1

$$C_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad C_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad C_4 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_5 := \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad C_6 := \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_7 := \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \quad C_8 := \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_9 := \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} \quad C_{10} := \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем вектор проекций pr стержней рамы на оси общей системы координат $хоу$

$$i := 1 \dots \text{cols}(Sc) \quad j := 1 \dots \text{rows}(Sc)$$

$$pr_i := - \sum_{j=1}^{nuz} \left[(Sc^T)_{i,j} \cdot C_j \right]$$

$$pr_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad pr_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad pr_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad pr_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$pr_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad pr_6 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad pr_7 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad pr_{17} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Вычислим длины стержней рамы

$$i := 1 \dots nel$$

$$L_i := \sqrt{pr_i^T \cdot pr_i} \quad L_1 = 4 \quad L_2 = 3 \quad L_3 = 5 \quad L_{nel} = 4$$

Определяем направляющие косинусы

$$\alpha_i := \frac{pr_i}{L_i} \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix} \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{11} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Складемо матрицю рівноваги $S1$, що виходить зі структурної Sc заміною в останній елементів 1 на вектори α_i , елементів -1 на $-\alpha_i$, а нулів - на відповідні нульові вектори. Для цього треба використати оператор програмування

```

S1 := | Sc ← Sc
      | for i ∈ 1.. 2·rows(Sc)
      |   for j ∈ 1.. cols(Sc)
      |     S1i,j ← 0
      |   for i ∈ 1.. rows(Sc)
      |     for j ∈ 1.. cols(Sc)
      |       if Sci,j = 1
      |         | r1 ← 2·i - 1
      |         | c1 ← j
      |         | for il ∈ 1.. 2
      |         |   S1r1+il-1, c1 ← (αj)il
      |       if Sci,j = -1
      |         | r1 ← 2·i - 1
      |         | c1 ← j
      |         | for il ∈ 1.. 2
      |         |   S1r1+il-1, c1 ← -(αj)il
      | S1

```

Запишемо вектори зовнішніх навантажень, що діють у кожному вузлі ферми. Опорні реакції в розрахунок не приймаємо, тому що при врахуванні межових умов відповідні елементи будуть вилучені.

$$P_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_5 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_6 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_7 := \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} \quad P_8 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_9 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_{10} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Сформуємо вектор правої частини Q з векторів P_i і нульових елементів, розташованих нижче P_i :

```

Q := | for i ∈ 1.. rows(S1)
      |   Qi ← 0
      |   for i ∈ 1.. nuz
      |     for il ∈ 1.. 2
      |       | r1 ← 2·i - 1
      |       | Qir1+il-1 ← (Pi)il
      | Q

```

$Q^T =$

Перелік межових умов:

пор - число опорних стрижнів;

nsv - вектор, компоненти якого відповідають накладеним на систему зв'язкам.

У матриці S1 й у векторі Q необхідно видалити відповідні рядки й елементи.

пор := 3 nsv₁ := 1 nsv₂ := 4 nsv₃ := 20

```

A := | k ← 0
      for i ∈ 1..rows(S1)
        continue if (i = nsv1) ∨ (i = nsv2) ∨ (i = nsv3)
        k ← k + 1
        for j ∈ 1..cols(S1)
          Spk,j ← S1i,j
          Tk ← (-Q)i
      (Sp T)T

```

Відзначимо, що елементами складного масиву A є матриця Sp і права частина T системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАУ), вирішення якої приводить до визначення вектора Z - вектора зусиль у стрижнях ферми:

$$Z := (A_1)^{-1} \cdot A_2$$

z =

	1
1	0
2	0
3	-2.5
4	1.5
5	2
6	-1.5
7	-2.5
8	3
9	2
10	-3
11	-2.5
12	4.5
13	-6
14	-4.5
15	7.5
16	0
17	-6

Используя равенство $Q = S \cdot R$, определим опорные реакции $R_{x1} = Q_1$, $R_{y1} = Q_2$ и $R_{y6} = Q_{17}$

$$Q := S1 \cdot Z$$

$$R_{x2} := Q_{(nsv_1)} \quad R_{y2} := Q_{(nsv_2)} \quad R_{y10} := Q_{(nsv_3)}$$

$$R_{x2} = 0 \quad R_{y2} = -2 \quad R_{y10} = -6$$

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

1. Дані для виконання завдання потрібно вибрати з таблиці 1 відповідно до свого шифру, який повідомляється студентові викладачем.

Для цього під шифром, який являє собою тризначне число, слід розташувати три букви російського алфавіту,

наприклад: шифр - 2 6 3

букви - а б в

У табл.1 з вертикальних стовпців, позначених знизу відповідною буквою, потрібно вибрати числа, які розташовані у тому ж горизонтальному рядку, номер якого збігається з номером букви.

Наприклад, для зазначеного вище шифру: номер розрахункової схеми (рис. 4) збігається з останньою цифрою шифру, з номером III-ї схеми; зовнішні сили: $P_1=4\text{кн}$, $P_2=1\text{кн}$, $P_3=5\text{кн}$, ...;

розміри: $d=5,0\text{м}$, $h=7,5\text{м}$; кут $\varphi=300^\circ$; № панелі - 3.

Зауваження. Студенти-заочники вибирають дані з табл.1 відповідно до шифру – це три останні цифри номера залікової книжки.

2. При виконанні завдання необхідно дотримуватися наступних вимог:

а) акуратно накреслити розрахункову схему в графічному редакторі Paint, вказати на ній всі задані розміри й навантаження відповідно до вхідних даних, осі координат, пронумерувати всі вузли й стрижні ферми;

б) вирішення завдання проводити в математичному пакеті Mathcad за аналогією з прикладом розрахунку ферми;

в) всі розрахунки повинні супроводжуватися короткими поясненнями у вигляді тексту;

г) лінії впливу зусиль у стрижнях ферми необхідно будувати з вказівкою характерних ординат та їхніх знаків. Всі креслення треба виконувати з використанням графічного редактора Paint з дотриманням масштабу.

Завдання. Розрахунок статично визначених ферм

Для заданої ферми (рис. 4) потрібно визначити поздовжні зусилля у всіх її стрижнях. Завдання вирішити в середовищі Mathcad;

Пояснення. Для виконання розрахунку ферми необхідно виконати наступні пункти завдання:

1) пронумерувати вузли та стрижні ферми, сформувати структурну матрицю - S_c ;

2) задати координати вузлів;

3) знайти проекції стрижнів ферми на осі загальної системи координат;

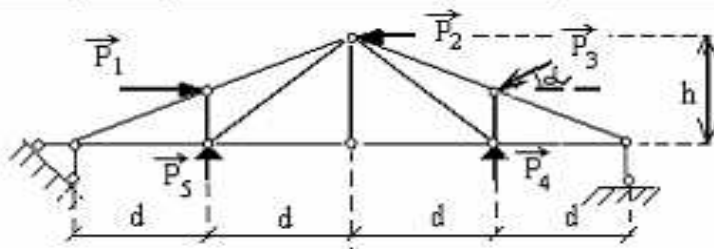
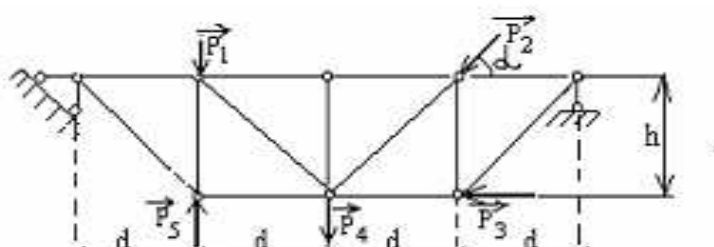
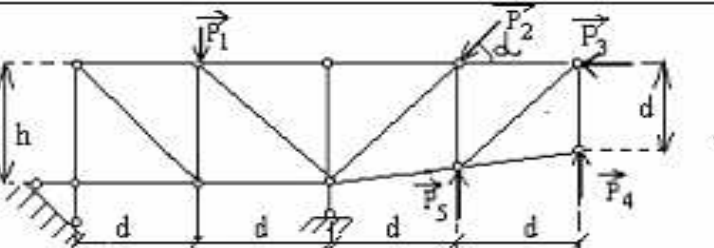
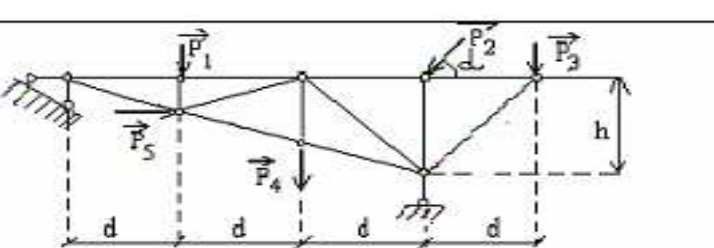
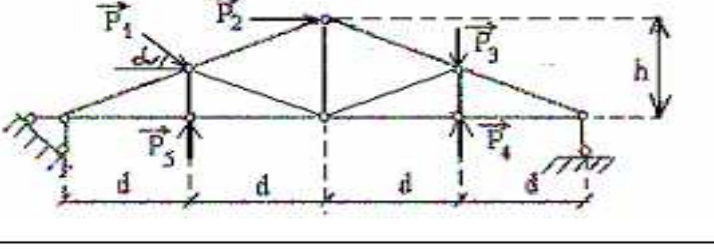
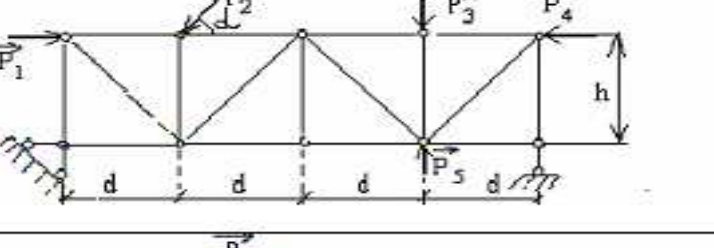
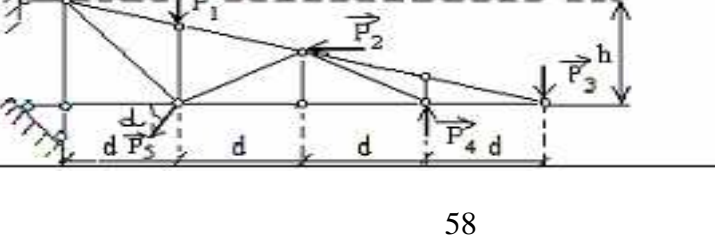
4) обчислити довжини стрижнів L_i ;

5) визначити напрямні косинуси α_i ;

6) скласти вектор зовнішнього навантаження P і матрицю S_o ;

7) сформувати вектор Q і матрицю S_p для запису системи рівнянь рівноваги вихідної ферми в матричному виді:

8) вирішити отриману систему лінійних рівнянь й оцінити отримані результати; при необхідності провести додаткові розрахунки, змінюючи вектор зовнішнього навантаження;

I)	
II)	
III)	
IV)	
V)	
VI)	
VII)	

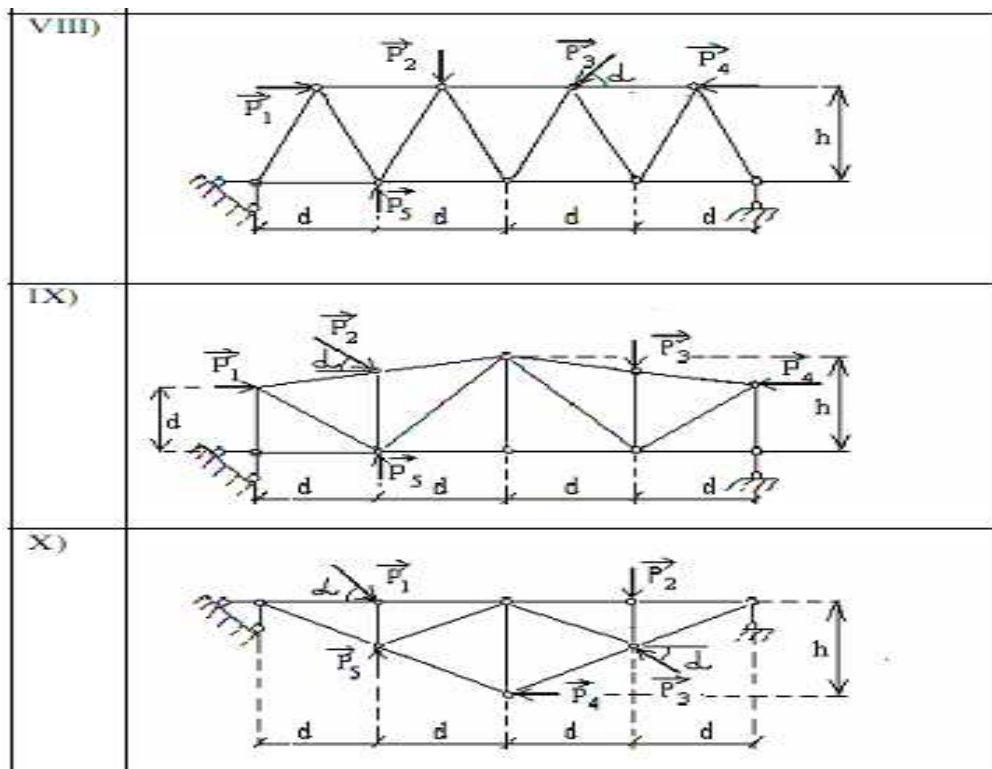


Рис. 4.3

Таблица 1

№ строки	Расчетная схема	Внешние силы, кН					Размеры, м		Угол α , град.	№ панели
		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	d	h		
1	I	5	6	1	2	2	3,0	4,5	45	2
2	II	4	8	3	6	1	4,0	6,0	30	3
3	III	3	0	5	7	8	5,0	7,5	45	2
4	IV	2	9	7	9	3	3,2	4,8	60	3
5	V	1	7	9	8	4	4,2	6,2	90	2
6	VI	0	1	10	5	5	5,2	7,6	30	3
7	VII	6	2	8	3	9	3,5	5,0	45	2
8	VIII	7	3	6	1	7	4,5	6,5	60	3
9	IX	8	4	4	4	6	3,8	5,5	30	2
0	X	9	5	2	0	0	4,8	7,0	45	3
	в	а	б	в	а	б	в		б	а

ДОДАТОК 1. Вбудовані функції

Тригонометричні функції

$\sin(z)$ – синус
 $\cos(z)$ – косинус
 $\tan(z)$ – тангенс

$\sec(z)$ -- секанс
 $\csc(z)$ – косеканс
 $\cot(z)$ – котангенс

Гіперболічні функції
 $\sinh(z)$ -- гіперболічний синус
 $\cosh(z)$ -- гіперболічний косинус
 $\tanh(z)$ -- гіперболічний тангенс
 $\operatorname{sech}(z)$ -- гіперболічний секанс
 $\operatorname{csch}(z)$ -- гіперболічний косеканс
 $\operatorname{coth}(z)$ -- гіперболічний котангенс

Зворотні тригонометричні функції

$\arcsin(z)$ -- зворотний тригонометричний синус
 $\arccos(z)$ -- зворотний тригонометричний косинус
 $\arctan(z)$ -- зворотний тригонометричний тангенс

Зворотні гіперболічні функції

$\operatorname{arsinh}(z)$ -- зворотний гіперболічний синус
 $\operatorname{arcosh}(z)$ -- зворотний гіперболічний косинус
 $\operatorname{artanh}(z)$ -- зворотний гіперболічний тангенс

Показові й логарифмічні функції

$\exp(z)$ -- експонентна функція
 $\ln(z)$ -- натуральний логарифм (по підставі e)
 $\log(z)$ -- десятковий логарифм (по підставі 10)

Функції комплексного аргументу

$\operatorname{Re}(z)$ -- виділення дійсної частини z
 $\operatorname{Im}(z)$ -- виділення мнімої частини z

ДОДАТОК 2. Оператори й функції для роботи з векторами й матрицями

Оператор	Уведення	Призначення оператора
$V1+V2$	$V1+V2$	Додавання двох векторів $V1$ й $V2$
$V1-V2$	$V1-V2$	Вирахування двох векторів $V1$ й $V2$
$-V$	$-V$	Зміна знаку в елементах вектора V
$-M$	$-M$	Зміна знаку в елементах матриці
$V-Z$	$V-Z$	Вирахування з вектора V скаляра Z
$Z*V, V*Z$	$Z*V, V*Z$	Множення вектора V на скаляр Z
$Z*M, M*Z$	$Z*M, M*Z$	Множення матриці M на вектор Z
$V1*V2$	$V1*V2$	Множення двох векторів $V1$ й $V2$
$M*V$	$M*V$	Множення матриці M на вектор V
$M1*M2$	$M1*M2$	Множення двох матриць $M1$ й $M2$

V/Z		Розподіл вектора V на скаляр Z
M/Z		Розподіл матриці M на скаляр Z
M^{-1}	M^{-1}	Обіг матриці M
M^n	M^n	Зведення матриці M у ступінь n
$ V $	$ V $	Обчислення квадратного кореня з V
$ M $	$ M $	Обчислення визначника матриці
V^T	$V \text{ Ctrl!}$	Транспонування вектора V
M^T	$M \text{ Ctrl!}$	Транспонування матриці M
$V1 \times V2$	$V1 \text{ Ctrl} * V2$	Крос-множення векторів $V1$ й $V2$
\overline{V}	$V \text{ '}$	Одержання комплексно-сполученого вектору або матриці
ΣV	$\text{Alt } \$ V$	Обчисл. суми елементів вектору V
$\rightarrow V$	$V \text{ Ctrl} -$	Векторизація вектору V
$\rightarrow M$	$M \text{ Ctrl} -$	Векторизація матриці M
$M^{<n>}$	$M \text{ Ctrl} ^ n$	Виділення n -го стовпця матриці M
V_n	$V [n$	Виділення n -го елемента вектора V
$M_{m, n}$	$M [(m, n)$	Виділення елемента (m, n) матриці M

Векторні функції

$\text{length}(V)$ - повертає довжину вектора;

$\text{last}(V)$ - повертає індекс останнього елемента;

$\text{max}(V)$ - повертає максимісний за значенням елемент;

$\text{min}(V)$ - повертає мінімісний за значенням елемент;

$\text{Re}(V)$ - повертає вектор дійсних частин вектора з комплексними елементами;

$\text{Im}(V)$ - повертає вектор мнимих частин вектора з комплексними елементами;

Матричні функції:

$\text{augment}(M1, M2)$ -- поєднує в одну матриці $M1$ й $M2$, які мають однакове число рядків (об'єднання йде пліч-о-пліч);

$\text{identity}(n)$ -- створює одиничну квадратну матрицю розміром $n \times n$;

$\text{stack}(M1, M2)$ -- поєднує дві матриці $M1$ й $M2$, які мають однакове число стовпців, розташовуючи $M1$ над $M2$;

$\text{submatrix}(A, ir, jr, ic, jc)$ -- повертає подматрицю, що складається із всіх елементів, що втримуються в рядках з ir по jr і стовпцях з ic по jc ($ir \leq jr$ й $ic \leq jc$);

diag (V) -- створює діагональну матрицю, елементом головної діагоналі якої є вектор V;

matrix (m, n, f) -- створює матрицю, у якій (i, j)-й елемент містить $f(i, j)$, де $i = 0, 1, \dots, m-1$; $j = 0, 1, \dots, n-1$;

Re (M) -- повертає матрицю дійсних частин матриці M з комплексними елементами;

Im (M) -- повертає матрицю уявних частин матриці M з комплексними елементами.

Функції, що повертають спеціальні характеристики матриць:

cols (M) -- повертає кількість стовпців матриці M;

rows (M) -- повертає кількість рядків матриці M;

rank (M) -- повертає ранг матриці M;

tr (M) -- повертає слід (суму діагональних елементів) квадратної матриці M;

mean (M) -- повертає середнє значення елементів масиву M;

median (M) -- повертає медіану елементів масиву M;

cond1(M) -- повертає число обумовленості матриці, обчислене в нормі L1;

cond2(M) -- повертає число обумовленості матриці, обчислене в нормі L2;

conde (M) -- повертає число обумовленості матриці, обчислене в нормі

Евклідового простору;

condi (M) -- повертає число обумовленості матриці, засноване на рівномірній нормі;

norm1(M) -- повертає L1, норму матриці M;

norm2(M) -- повертає L2, норму матриці M;

norme (M) -- повертає Евклідову норму матриці M;

normi (M) -- повертає невизначену норму матриці M.

ДОДАТОК 3. Повідомлення про помилки можна подивитися у файлі

mcad_error.hlp

Рекомендована література

1. Плис А. И. , Сливина Н. А. **Mathcad 2000**. Математичний практикум для економістів й інженерів: Навч. посібник. - М: Фінанси й статистика, 2000.-656с.
2. Кирьянов Д. В. **Самовчитель MathCAD 2001**.- М. Видавництво, [ВНУ](#) 2001,- 544 с.
3. Окулярів В. Ф. **MathCAD 2000 для студентів й інженерів**. М.: Комп'ютер Пресс, 2000.- 288с.

Додаткова література

4. Корн Г., Корн Т. Довідник по математиці для науковців й інженерів.- М.: Физматлит, 1973. 832 с.
5. Бундаєв В. В., Цингеев Д. Ц. Розрахунок статично визначених ферм на ЕОМ Контрольні завдання й методичні вказівки.- Улан-Уде: Із ВСГТУ, 1987.-34с.:іл. (www.bcgty.ru)
6. www.mathcad.ru

Зміст

Вступ.....	3
1. ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ, МОЖЛИВОСТІ Й ТЕХНОЛОГІЯ РОБОТИ	3
1.1 Початок роботи. Інтерфейс системи MathCAD.....	3
1.2 Команди меню і панелі інструментів.....	5
1.3 Введення і редагування із застосуванням клавіатури.....	6
1.4 Оператори введення (присвоювання) і виводу результату	7
1.5. Керування обчисленнями.....	8
2. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ.....	9
Лабораторна робота № 1. Базові обчислення і операції	9
Лабораторна робота № 2. Ранжировані (дискретні) змінні. Ітераційні обчислення.....	19
Лабораторна робота № 3. Обчислення сум, добутків, похідних та інтегралів.....	21
Лабораторна робота № 4. Вектора й матриці. Дії з масивами.....	25
Лабораторна робота № 5. Побудова графіків, діаграм, рисунків	31
Лабораторна робота № 6. Вирішення рівнянь і систем рівнянь	34
Лабораторна робота № 7 . Вирішення оптимизационных завдань.....	42
Лабораторна робота № 8. Вирішення розрахункових завдань будівництва ...	47
ДОДАТОК 1. Вбудовані функції.....	59
ДОДАТОК 2. Оператори й функції для роботи з векторами й матрицями	60
Рекомендована література	62
Додаткова література	62
Зміст	63

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ до виконання лабораторних робіт за темою
«Інформаційні технології MathCad в будівництві» з дисципліни «Інформаційні
технології в будівництві і бази даних» (для студентів 3 курсу спеціальності
6.092101 – «Промислове і цивільне будівництво»)

Укладачі: *Анатолій Леонідович Шаповалов,*

Микола Васильович Гринчак,

Катерина Володимирівна Кузьмичова

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2009, поз. 523М

Підп. до друку 13.10.2009	Формат 60x84 1/16	Папір офісний.
Друк на ризографі.	Умовн.-друк.арк. 2,7	Обл.-вид.арк.3,2
Замовл. №_____	Тираж 50 прим.	

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12